

Correction des exercices du chapitre 1

Correction n°1 : Libre parcours moyen dans les fluides

Le libre parcours moyen (lpm) s'obtient précisément en considérant la densité et la section efficace des particules pour estimer la distance parcourue entre deux chocs. On se propose ici d'établir un raisonnement plus qualitatif permettant de remonter simplement à « la distance disponible à chaque particule » qui est certainement du même ordre de grandeur que le lpm.

La quantité utile est le volume molaire V_m , qui est le volume occupé par une mole de fluide soit \mathcal{N}_A particules de sorte que le volume disponible pour chaque particule est $V_{\text{part}} = V_m / \mathcal{N}_A$. Il s'ensuit que la distance caractéristique disponible pour une particule vérifie $L^3 = V_{\text{part}}$ d'où

$$L \approx \left(\frac{V_m}{\mathcal{N}_A} \right)^{1/3}.$$

Par suite, le volume molaire d'un gaz peut être obtenu à partir de la loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT \Rightarrow V_m = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P}.$$

Il est cohérent que ce volume décroisse avec la pression et croisse avec la température. Numérique, à $P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ et $T = 300 \text{ K}$, on calcule

$$V_{m,\text{gaz}} \approx 24,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \approx 24,9 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Pour une phase condensée incompressible et indilatable (pcii) on peut connaître la masse volumique (typiquement $1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) et la masse molaire ($18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour l'eau par exemple) dont on déduit ^a

$$V_{m,\text{pcii}} = M/\rho \approx 18 \text{ mL} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Il vient finalement : $L \approx 35 \text{ \AA}$ pour le gaz et $L \approx 3,1 \text{ \AA}$ pour la phase condensée. La taille d'une entité constitutive (atome, molécule) étant de l'ordre de l'angström, on quantifie le fait que les gaz sont des milieux très peu denses ($\delta \approx 10$ rayons atomiques) au contraire des phases condensées ($\delta \approx 1$ rayon atomique). Cette différence fondamentale explique de nombreuses différences de comportement entre ces états de la matière, notamment la compressibilité des gaz et incompressibilité des phases condensées, et le fait que dans les premiers les interactions soient négligeables en première approximation (gaz parfait). Rappelons que la différence avec le solide se fait au niveau de l'organisation des particules les unes par rapport aux autres : dans un solide chaque particule garde les mêmes voisins sur une échelle de temps longue devant les durées typiques d'expérience. Ceci est dû à la prédominance des interactions attractives à courte portée.

^a Le volume molaire du gaz est nettement plus grand (environ 1000 fois) que celui de la phase condensée, sauf lorsque les conditions thermodynamiques deviennent extrêmes, par exemple au voisinage du point critique.

Correction n°2 : Suivi eulérien et lagrangien de la température d'un vacancier

Le suivi effectué par le vacancier est un suivi lagrangien : on suit la voiture (la particule) le long de son trajet et on relève une température qui est fonction de la position de départ et du temps. À l'inverse, la description eulérienne qui consiste à donner, à un instant t , la température en tout point, correspond par exemple à la lecture d'une carte de Météo France.

Correction n°3 : Stationnarité des écoulements

On a immédiatement

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha x}{\partial t} \vec{u}_x + \frac{\partial -\alpha y}{\partial t} \vec{u}_y = \vec{0}, \\ \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha(x + v_0 t)}{\partial t} \vec{u}_x + \frac{\partial -\alpha y}{\partial t} \vec{u}_y = v_0 \vec{u}_x.\end{aligned}$$

Le premier écoulement est donc stationnaire ; pas le second dont le champ de vitesse se translate continuellement selon \vec{u}_x à la vitesse v_0 .

Correction n°4 : Vortex de Taylor

1. Le rotationnel en cylindrique est donné par :

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ r \end{pmatrix} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{u}_z \neq \vec{0}.$$

L'écoulement est donc rotationnel.

2. La circulation du vecteur vitesse sur un cercle \mathcal{C} centré sur l'origine et de rayon r est :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{r} r d\theta = 2\pi\alpha.$$

Du fait de la dépendance du champ de vitesse en $1/r$ la circulation sur un cercle de rayon r est constante.

Correction n°5 : Lignes associées à un écoulement donné

Corrigé en classe.

Correction n°6 : Un écoulement incompressible

On a

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + \frac{\partial \alpha x}{\partial y} + 0 = 0.$$

L'écoulement est effectivement incompressible.

Correction n°7 : Analyse de champs de vitesse

1. Le premier écoulement est de la forme $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$ (écoulement tourbillonnaire type vortex de Taylor). Il est rotationnel mais incompressible.

2. Le second écoulement est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_r$. Il est irrotationnel mais compressible (clairement de divergence non nul!).
3. Le troisième écoulement est de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$. Il est rotationnel mais incompressible.
4. Le dernier écoulement est analogue au dipôle électrostatique (une source et un puits). Il dérive donc d'un potentiel (écoulement potentiel $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$) ce qui implique qu'il soit irrotationnel. La même analogie montre que $\text{div } \vec{v} = 0$ presque partout, sauf au niveau de la source et du puits (de la même manière que $\text{div } \vec{E}$ n'est non-nul que sur les sources).

Correction n°8 : Cinématiques eulérienne et lagrangienne

1. L'écoulement est stationnaire puisqu'il ne dépend pas explicitement de t , incompressible car $\text{div } \vec{v} = \alpha - \alpha = 0$, et irrotationnel car $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$.

2. Les lignes de courant sont tangentes en tout point au vecteur vitesse, d'où :

$$\vec{v} \wedge d\vec{l} = \vec{0} = \begin{vmatrix} \alpha x & dx \\ -\alpha y & dy \\ 0 & dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha y dz & -\alpha x dz \\ \alpha x dy + \alpha y dx & \end{vmatrix} \quad (9.10)$$

L'annulation des deux premières composantes implique que $dz = 0$ (les lignes de champ restent dans le plan, ce qui découle du fait que la vitesse n'a pas de composante selon Oz). La troisième composante mène à $x dy = -y dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$, qui s'intègre en $\ln(x) = -\ln(y) + \text{cste}$, soit finalement

$$xy = \text{cste} \quad (9.11)$$

Les lignes de courant sont donc des hyperboles ($y = \text{cste}/x$) dans le plan Oxy .

3. Pour calculer la trajectoire, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = \alpha x \\ \frac{dy}{dt} = v_y = -\alpha y \end{cases} \quad (9.12)$$

d'où, en résolvant les équations différentielles et en incluant les conditions initiales, $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ et $y(t) = y_0 e^{-\alpha t}$. On constate qu'à tout instant $y(t) = x_0 y_0 / x(t)$: les trajectoires sont des hyperboles confondues avec les lignes de courants, ce qui est attendu car l'écoulement est stationnaire.

4. Commençons par la description lagrangienne, qui est la plus simple. En effet, dans la mesure où il s'agit de suivre une particule dont on connaît la trajectoire, ses vitesse et accélération s'obtiennent par dérivation (c'est littéralement de la mécanique du point : on a un mobile dont on connaît la trajectoire, on dérive pour avoir la vitesse et l'accélération). Il vient :

$$\vec{v}_L = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y = \alpha x_0 e^{\alpha t} \vec{e}_x - \alpha y_0 e^{-\alpha t} \vec{e}_y$$

et en dérivant à nouveau

$$\vec{a}_L = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y = \alpha^2 x_0 e^{\alpha t} \vec{e}_x + \alpha^2 y_0 e^{-\alpha t} \vec{e}_y.$$

La vitesse eulérienne est celle qui est donnée par l'énoncé (vitesse d'une particule fluide au point (x, y)). L'accélération eulérienne s'écrit

$$\vec{a}_E = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = \vec{0} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{e}_x + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \vec{e}_y = \alpha^2 x \vec{e}_x + \alpha^2 y \vec{e}_y.$$

En effet, la dérivée particulière exprime bien le fait que la vitesse de la particule présente à l'instant t au point (x, y) varie (du fait des variations locales de la vitesse et du mouvement infinitésimal de la particule). Il est rassurant que les accélérations lagrangiennes et eulériennes coïncident puisque le comportement physique du fluide ne peut en aucun cas dépendre de la description utilisée pour faire les calculs. Cela vous invite aussi, lorsque vous devrez calculer l'accélération d'une particule fluide, à utiliser la méthode la plus pratique en fonction de ce que vous avez calculé précédemment.

Correction n°9 : Écoulement sous une onde de gravité

1. L'écoulement est instationnaire car le temps apparaît explicitement dans le champ de vitesses. On calcule facilement en coordonnées cartésiennes

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = v_0 e^{kz} (-k) \cos(\omega t - kx) + 0 + v_0 k e^{kz} \cos(\omega t - kx) = 0,$$

l'écoulement est donc incompressible. Enfin, le rotationnel ne peut posséder qu'une composante selon \vec{e}_y qui vaut

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = v_0 k e^{kz} \sin(\omega t - kx) - v_0 e^{kz} (-k) (-\sin(\omega t - kx)) = 0.$$

L'écoulement est donc aussi irrotationnel.

Remarque

La théorie des ondes de surface est développée sous les hypothèses d'écoulement incompressible et irrotationnel.

2. Les lignes de courant sont tangentes aux vecteurs vitesse.

3. La surface libre est une onde progressive. La vitesse normale à la surface est nulle de sorte que celle-ci est tangente aux vecteurs vitesses en surface sur la figure (a).

4. Le bassin est de grande profondeur dès lors que la longueur d'onde est faible devant la profondeur du bassin, ce qui se traduit par

$$\lambda \ll h \Leftrightarrow kh \ll 1.$$

Nous quantifierons ce résultat au complément sur les ondes de surface.

5. Comme en mécanique, la trajectoire s'obtient en intégrant la vitesse. Selon Ox :

$$x(t) = \int v_x(t) dt = v_0 e^{kz} \int \sin(\omega t - kx) dt = -\frac{v_0 e^{kz}}{\omega} \cos(\omega t - kx).$$

De même selon Oz :

$$z(t) = \int v_z(t) dt = \frac{v_0 e^{kz}}{\omega} \sin(\omega t - kx).$$

On vérifie que $x^2(t) + z^2(t) = \left(\frac{v_0 e^{kz}}{\omega}\right)^2$ de sorte que les trajectoires sont bien des cercles, lesquels, d'après les signes respectifs de x et z , sont décrits dans le sens horaire (anti-trigonométrique).

Dans ce calcul on a négligé le fait que la vitesse dépend de la position c'est-à-dire qu'on a considéré que sur une période du mouvement le déplacement de la particule v_0/ω est négligeable devant la longueur d'onde $2\pi/k$.

6. La ligne de courant est la ligne de champ du vecteur vitesse, qui n'est pas un cercle ici comme on l'a montré plus haut. Il n'y a que dans le cas d'un écoulement *stationnaire* que ces lignes sont confondues avec les trajectoires ce qui n'est pas le cas ici.

Correction n°10 : Tourbillon de Rankine

1. Les équations de la magnétostatique s'écrivent :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

Pour un écoulement incompressible :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{v}) &= \vec{\omega} = 2\vec{\Omega}\end{aligned}\tag{9.13}$$

\vec{v} est analogue à \vec{B} , et $2\vec{\Omega}$ à $\mu_0 \vec{J}$

2. Il s'agit d'un problème analogue à celui d'un fil infini en magnétostatique. On se place en coordonnées cylindriques et on considère M un point quelconque. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour la vorticité (analogue aux courants) : c'est un plan d'antisymétrie pour \vec{v} (analogue à \vec{B}). D'où $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta$. Par invariance selon z et θ , v_θ ne dépend que de r .

On utilise alors le théorème d'Ampère. Pour $r \leq a$:

$$2\pi v_\theta r = 2\Omega\pi r^2$$

soit $v_\theta = \Omega r$ et pour $r > a$:

$$2\pi v_\theta r = 2\Omega\pi a^2$$

soit :

$$v_\theta = \frac{\Omega a^2}{r}$$

Correction des exercices du chapitre 2

Correction n°11 : Résultante des forces de pression

Commençons par étudier un élément de surface dS , de normale \vec{u}_r , de la demi-sphère dans le système de coordonnées sphériques de centre O . La résultante des forces de pression qui s'y exerce est : $d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{eau}} + d\vec{F}_{\text{air}} = p_{\text{eau}}dS\vec{u}_r - p_{\text{air}}dS\vec{u}_r$. Or la pression dans l'air est constante $p_{\text{air}} = p_0$ et la pression dans l'eau ne dépend que de z et est donnée par l'équilibre hydrostatique $p_{\text{eau}} = p_0 + \rho g(z - h)$ où z est pris nulle au fond et h est la hauteur du fluide. Ainsi, la force qui s'exerce sur dS est

$$d\vec{F} = (p_0 + \rho g(z - h) - p_0)dS\vec{u}_r = \rho g(z - h)dS\vec{u}_r.$$

Par symétrie, la force totale, somme de toutes ces contributions sur la partie mouillée du saladier, est selon \vec{u}_z de sorte qu'on ne peut s'intéresser qu'à la composante

$$d\vec{F} \cdot \vec{u}_z = \rho g(z - h)dS \sin \theta.$$

Enfin, l'élément de surface sphérique a pour expression $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ et en termes des coordonnées sphériques on exprime $z = R \sin \theta$. On a alors à intégrer :

$$F = \iint \rho g(R \sin \theta - h) \sin \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

La surface de la sphère immergée est décrite en faisant varier l'angle φ de 0 à 2π et l'angle θ de 0 à un angle limite marquant la hauteur d'eau $\theta_s = \arcsin(h/R)$. Il faut ainsi calculer

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_s} \rho g(R \sin \theta - h) \sin^2(\theta) R^2 d\theta d\varphi.$$

L'expression finale est établie en calculant

$$\int \sin[3](x)dx = -\frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{12} \cos(3x) \quad \text{et} \quad \int \sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x),$$

mais ne présente pas de simplification avantageuse de sorte que c'est assez pénible...

La sphère se soulève dès que la résultante des forces en question compense son poids ce qui n'est possible que si elle n'est pas trop lourde.

Correction n°12 : Pression dans un fluide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur

On part de l'équation fondamentale de la statique des fluides dans laquelle on a $\rho = \rho_0$ constante car le fluide est incompressible et g constante par hypothèse. On a donc (z ascendant) :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 g.$$

Cette équation s'intègre immédiatement :

$$p(z) = p_0 - \rho_0 g z,$$

et lorsque $z \rightarrow z + 10$ on gagne une pression $\Delta p = 10 \times \rho_0 g \approx 1.10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$.

Correction n°13 : Interprétation probabiliste du facteur de Boltzmann

Cette question n'a de sens qu'à condition de remarquer que le modèle précédent **ne permet pas de connaître la position ni l'altitude précise de chaque particule**. C'est tout l'enjeu de la physique statistique !

Considérons donc une tranche d'atmosphère cylindrique de base S comprise entre z et $z + dz$. Le nombre de particules dans la tranche est donné par

$$dN(z) = N_A \frac{dm(z)}{M} = N_A \frac{\rho(z) S dz}{M} = \frac{N_A \rho_0 S}{M} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz.$$

Par intégration on exprime le nombre total de particules dans la colonne d'atmosphère de hauteur h :

$$N = \int_{z=0}^h dN(z) = \frac{N_A \rho_0 S H}{M} \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{H}\right)\right).$$

La probabilité pour une particule donnée de se trouver dans cette tranche est liée, à un facteur numérique près, à la proportion de particules dans la tranche d'épaisseur dz : $P(z) = dN(z)/N$ qui est proportionnelle au facteur

$$\exp\left(-\frac{h}{H}\right) = \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{m^* gz}{k_B T}\right)$$

où m^* est la masse d'une molécule $m^* = M/N_A$ et $k_B = R/N_A = 1,381.10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

On reconnaît ici le facteur $\exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right)$ appelé facteur de Boltzmann. On prolonge ce résultat par la loi de Boltzmann : « Dans un système à l'équilibre thermique avec un thermostat à température T , la probabilité pour une particule microscopique indépendante d'être dans un état d'énergie E_i est proportionnelle au **facteur de Boltzmann** ».

Correction n°14 : La poussée d'Archimède dans l'eau

1. Si le solide flotte, c'est que son poids est équilibré par la poussée d'Archimède : $\vec{P} = -\vec{\Pi}$. Or on a $\vec{P} = \rho_s V \vec{g}$ et la poussée d'Archimède s'exprime à partir du volume immergé V_i : $\vec{\Pi} = -\rho_l V_i \vec{g}$. L'équilibre impose ainsi

$$\rho_s V \vec{g} = -\rho_l V_i \vec{g} \quad \text{d'où} \quad V_i = \frac{\rho_s}{\rho_l} V.$$

Puisque $V > V_i$, il s'ensuit que $\rho_s < \rho_l$.

2. Le rapport ρ_s/ρ_l est égal à 0,895. Il en est de même, d'après la question précédente, pour le rapport du volume immergé sur le volume total si bien que le volume immergé V_i représente près de 90 % du volume total V de l'iceberg.

3. Il est facile de vérifier que la fonte d'un morceau de glace pure flottant sur de l'eau pure se produit sans changement de niveau de l'eau. Le volume de glace immergé correspond en effet au volume d'eau liquide nécessaire pour égaler le poids du glaçon (Eq. 1). En fondant, le glaçon produit (par conservation de la masse) exactement ce volume d'eau, qui « bouche le trou laissé par la disparition de la glace solide ». Le niveau de l'eau reste le même.

On peut également faire le calcul. Pour un glaçon de 1 cm^3 et de masse volumique $0,917 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ (qui contient

donc 0,917 g d'eau), le volume immergé est 0,917 cm³ — comme pour un iceberg, la majeure partie est sous l'eau. Lorsque le glaçon aura fondu, ce 0,917 g d'eau aura désormais une masse volumique de 1 g·cm⁻³ occupera exactement le volume qu'occupait la partie immergée du glaçon.

Correction n°15 : Manomètre à deux liquides

On note C le point au sommet du liquide 2 (noir) à droite, et D le point au sommet à gauche. On applique la loi barométrique dans la partie droite entre différents points (se souvenir que la pression augmente toujours quand on descend dans un fluide en équilibre hydrostatique) :

- entre A et C : $p_A - p_C = \rho_1 g(z_C - z_A)$,
- entre B et D : $p_D - p_B = \rho_1 g(z_B - z_D)$,
- entre C et D : $p_C - p_D = \rho_2 g h$.

En sommant ces trois équations, on obtient :

$$p_A - p_B = \rho_2 g h + \rho_1 g(z_B - z_A + z_C - z_D) = \rho_2 g h + \rho_1 g(h - L),$$

d'où finalement

$$h = \frac{\Delta p + \rho_1 g L}{(\rho_1 + \rho_2)g}.$$

Correction n°16 : Hémisphères de Magdebourg

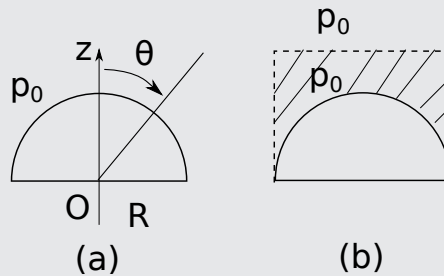


Schéma d'une hémisphère de Magdebourg.

Première méthode : On intègre la pression sur la sphère (voir figure (a)). Par symétrie, la force est selon z . La normale est \vec{e}_r . La force vaut :

$$F = \vec{F} \cdot \vec{e}_z = \int_S (-p_0 \vec{e}_r) R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \cdot \vec{e}_z \quad (9.14)$$

où $R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$ est l'élément de surface. Or $\vec{e}_z = \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta$. D'où :

$$\begin{aligned} F &= -p_0 R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= -p_0 R^2 \times 2\pi \times \left[\frac{(\sin(\theta))^2}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= -p_0 (\pi R^2) \end{aligned}$$

Application numérique : $F = \pi \times (0,21)^2 \times 10^5 = 1,4 \cdot 10^4$ N.

Deuxième méthode : On considère le système S hachuré de la figure (b). Ce système est fermé, constitué d'air, immobile. Selon z , la somme de la force de la sphère sur S et de la force de l'air sur S est nulle (première loi de Newton). Or, la force selon z de l'air sur S vaut $-p_0 (\pi R^2)$. La force de la sphère sur S vaut donc $+p_0 (\pi R^2)$. En utilisant la troisième loi de Newton, la force de S sur la sphère vaut $-p_0 (\pi R^2)$.

Correction n°17 : Équilibre d'un fluide en rotation

1. Le référentiel \mathcal{R} , en rotation uniforme dans le référentiel du laboratoire n'est pas galiléen. Il en résulte deux forces d'inertie : celle d'entraînement et celle de Coriolis. Dans une situation d'équilibre la force de Coriolis est nulle et on ne retient que la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r$. La particule est aussi soumise à son poids $\vec{P} = -dm g \vec{u}_z$ et à la résultante volumique des forces de pression $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) dV$ ou, en introduisant la masse volumique de l'eau (constante), $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) \frac{dm}{\rho}$.

2. On a

$$\vec{P} + \vec{f}_{ie} = dm \underbrace{(\omega^2 r \vec{u}_r - g \vec{u}_z)}_{\vec{g}_{\text{app}}}.$$

Sans surprise le champ est invariant par rotation autour de Oz , ni par translation selon cet axe. Une fois dessiné dans un plan horizontal (par exemple $z = 0$) il est obtenu en tout point. La composante verticale est la même en tout point de sorte que toutes les flèches ont la même hauteur. La composante radiale, tournée vers l'extérieur, est d'autant plus grande qu'on s'éloigne de l'axe. On obtient la figure suivante.

3. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à une particule fluide donne à l'équilibre

$$m \vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{f}_{ie} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) \frac{dm}{\rho} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0 \omega^2 r \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_0 g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(r, z) = \frac{\rho_0 \omega^2 r^2}{2} + f(z) \\ P(r, z) = -\rho_0 g z + g(r). \end{cases}$$

On a ainsi déterminé $P(r, z)$ à une constante près : $P(r, z) = \frac{\rho_0 \omega^2 r^2}{2} - \rho_0 g z + K$ et $P(0, 0) = P_0$ impose $K = P_0$. Finalement,

$$P(r, z) = \frac{\rho_0 \omega^2 r^2}{2} - \rho_0 g z + P_0.$$

4. La surface libre est une isobare vérifiant $P(r, z) = P_0$ ce qui impose

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g},$$

qui est une paraboléoïde de révolution (surface obtenue en faisant tourner une parabole autour de l'axe Oz). Laquelle est d'autant plus creusée que la vitesse de rotation est importante et d'autant plus plate que la pesanteur est grande. Les isobares sont perpendiculaires en tout point au champ de pesanteur apparent.

Correction n°18 : Tube courbé

On écrit la loi barométrique entre le niveau extérieur d'eau et le haut de la dénivellation (point A) pour obtenir $p_A = p_0 - \rho_e g h$. On considère ensuite qu'entre A et B (point sur la même verticale au niveau du coude) il n'y a pas de variation appréciable de pression car on est dans l'air. On écrit ensuite la loi fondamentale entre le point B et le point C situé au bout de la paille, le tout dans le référentiel tournant à ω .

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \vec{f} = \rho_a \omega^2 r,$$

où on a écrit l'expression de la force volumique d'inertie d'entraînement.

Cette loi s'intègre entre B et C :

$$dp = \rho_a \omega^2 r dr \Rightarrow p_0 - p_B = \rho_a \omega^2 \frac{L^2}{2}.$$

Finalement $\rho_a \omega^2 \frac{L^2}{2} = p_0 - p_B = p_0 - p_A = \rho_e g h \Rightarrow h = \frac{\rho_a \omega^2 L^2}{\rho_e 2g}$.