

Corrections du chapitre 1

Correction n°1 : Vitesse et accélération le long d'une trajectoire

1. Le repère étant fixe, on calcule la vitesse par dérivation des coordonnées :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 4 \times 2t \\ 4\left(1 - \frac{3t^2}{3}\right) \\ 3 + 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t \\ 4(1 - t^2) \\ 3(1 + t^2) \end{pmatrix} .$$

Le calcul de la norme est immédiat : $\|\vec{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 64t^2 + 16(1 + t^4 - 2t^2) + 9(1 + 2t^2 + t^4) = 25t^4 + 50t^2 + 25 = 25(1 + t^2)^2$, d'où

$$\|\vec{v}\| = 5(1 + t^2).$$

2. Aussi, pour l'accélération,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8t \\ 6t \end{pmatrix} ,$$

et $\|\vec{a}\|^2 = 64 + 64t^2 + 36t^2 = 64 + 100t^2$.

Correction n°2 : Ralentissement sur un cercle

1. L'accélération angulaire se traduit mathématiquement par $\ddot{\theta} = -\alpha_0$ qui s'intègre en $\dot{\theta} = -\alpha_0 t + \text{cste}$. La condition limite $\dot{\theta}(t = 0) = \omega_0$ implique que $\text{cste} = \omega_0$ et $\dot{\theta} = \omega_0 - \alpha_0 t$. La particule s'arrête quand $\dot{\theta} = 0$ soit au bout d'un temps $t_0 = \omega_0 / \alpha_0$.

ω_0 est une vitesse angulaire homogène à T^{-1} et α_0 une accélération angulaire homogène à T^{-2} donc le rapport des deux est bien un temps.

2. Une nouvelle intégration, avec $\theta(0) = 0$, donne

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}\alpha_0 t^2 + \omega_0 t .$$

On a donc

$$\theta(t_0) = -\frac{1}{2}\alpha_0 \frac{\omega_0^2}{\alpha_0^2} + \omega_0 \frac{\omega_0}{\alpha_0} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_0} .$$

C'est l'angle parcouru pendant le mouvement. La trajectoire étant circulaire, la *distance* parcourue vaut $L = R \times \omega_0^2 / 2\alpha_0$.

Correction n°3 : Accélération d'un pilote de chasse

Supposons que le pilote effectue son demi-tour sur un arc de cercle de sorte qu'en coordonnées cylindriques $\dot{r} = 0$ et $\dot{z} = 0$. Si de plus il le fait à vitesse angulaire constante, $\ddot{\theta} = 0$. Ses vitesse et accélération valent, avec R le rayon de l'arc de cercle,

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r.$$

On veut donc que

$$\frac{v^2}{R} < 10g \Rightarrow R > \frac{v^2}{10g} = 490 \text{ m}.$$

Correction n°4 : Automobiliste dans un escalier en colimaçon

Dans un repère cylindrique, sans variation de rayon et avec une vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ constante, l'accélération s'écrit $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{z}\vec{u}_z$. La vitesse étant constante on va avoir $\dot{z} = 0$ mais $\ddot{z} \neq 0$ de sorte qu'on n'a plus $v_0 = R\dot{\theta}$ et donc plus de lien immédiat entre vitesse et accélération comme dans l'exercice précédent.

Comment obtenir \dot{z} ? On sait que pour remonter un pas d'hélice h , le conducteur doit parcourir un cercle de rayon R à la vitesse v_0 . Il met donc un temps $2\pi R/v_0$, ce qui donne comme vitesse verticale

$$\dot{z} = \frac{h}{2\pi R/v_0} = \frac{hv_0}{2\pi R}.$$

On en déduit $\dot{\theta}$ car $v_0^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 : \dot{\theta}^2 = (v_0^2 - \dot{z}^2)/R^2$. Et enfin l'accélération :

$$a_0 = \|\vec{a}\| = R\dot{\theta}^2 = R\frac{v_0^2 - \dot{z}^2}{R^2} = \frac{v_0^2 \left(1 - \frac{h^2}{4\pi^2 R^2}\right)}{R} \approx 0,39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Correction n°5 : Chute d'un pot de fleur

On considère que le bas de la fenêtre est l'altitude 0. Soit H la hauteur dont est tombé le pot de fleur, sans vitesse initiale. Soit h la hauteur de la fenêtre. L'équation horaire est $z(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$.

Soit t_1 l'instant où le pot de fleur passe en haut de la fenêtre, t_2 celui où il arrive en bas. On a $t_2 - t_1 = \Delta t = 0,1$ s. Par ailleurs

$$H - 1/2gt_2^2 = 0 \quad H - 1/2gt_1^2 = h \Rightarrow 1/2g(t_2^2 - t_1^2) = h = 1/2g\Delta t(t_1 + t_2)$$

On a donc deux équations à deux inconnues t_1 et t_2 . La résolution donne $t_1 = 1,38$ s, $t_2 = 1,48$ s.

On obtient ensuite $H = 1/2gt_2^2 \approx 10,7$ m. En considérant des étages de 3 m il a été lâché du troisième étage.

Correction n°6 : Rendez-vous d'un projectile et d'une cible en mouvement

1. Par application du PFD dans le référentiel du sol, galiléen, et double intégration (voir le chapitre de dynamique), l'équation horaire de la cible est $\begin{cases} z_C = H - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_C = L \end{cases}$ et celle du projectile est $\begin{cases} z_P = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \\ x_P = v_0 t \cos \alpha \end{cases}$.

2. On réécrit l'équation du projectile en éliminant t ce qui donne

$$z_P(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x.$$

Lorsqu'il parvient en $x = L$, où il doit rencontrer la cible, il est donc à l'altitude atteinte $-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} L^2 + L \tan \alpha$.

Ceci arrive d'ailleurs au temps $t_0 = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}$.

Pendant ce temps, la cible, dans sa chute, a atteint l'altitude $z_C = H - \frac{1}{2}g \frac{L^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$.

On veut que $z_C = z_P$ pour qu'il y ait collision, ce qui donne après simplification $L \tan \alpha = H$.

3. On veut que $t_0 < t_{\text{chute}} = \sqrt{2H/g}$ pour que la collision ait lieu avant que la cible ne touche le sol. Ceci donne

$$\frac{L}{v_0 \cos \alpha} < \sqrt{2H/g} \Rightarrow v_0 > \sqrt{\frac{g}{2H}} \frac{L}{\cos \alpha}.$$

A.N. : $\alpha = 3,9^\circ$ et $v_0 > 105 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Corrections du chapitre 2

Correction n°7 : Étude d'un lancé au voisinage de la Terre

1. On travaille dans un repère cartésien de vertical \vec{e}_z ascendante. On applique le principe fondamental de la dynamique au point matériel M de masse m dans le référentiel du sol supposé galiléen. La seule force qui s'exerce est le poids de sorte que

$$m \vec{a} = m \vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g} = -g \vec{u}_z}. \quad (8.10)$$

2. Avant d'intégrer l'équation du mouvement on traduit les hypothèses de cette question sur les conditions initiales : $x(0) = y(0) = 0$ et $z(0) = h$. Aussi, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. On intègre alors l'équation :

$$\vec{v}(t) = -gt \vec{u}_z + \vec{cste} \quad \text{et} \quad v(0) = 0 \Rightarrow \text{cste} = 0.$$

puis à nouveau :

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Le mobile touche le sol lorsque $z(t_0) = 0$ soit en $t_0 = \sqrt{2h/g}$. Avec $h = 1,5 \text{ m}$ et $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ on trouve un temps de chute de $t_0 = 0,55 \text{ s}$.

Application à la balistique 3. À nouveau traduisons les hypothèses de la question sur les conditions initiales. On commence par exclure tout mouvement selon y . De plus, $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$. Enfin, $\dot{x}(0) = \vec{v}_0 \cdot \vec{u}_x = v_0 \cos \alpha$ et $\dot{z}(0) = \vec{v}_0 \cdot \vec{u}_z = v_0 \sin \alpha$. On intègre alors l'équation du mouvement $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{z} = -g$:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha \\ v_z = \dot{z} = -gt + \dot{z}(0) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \end{cases} \quad (8.11)$$

De la première équation, selon x , on peut tirer^a

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)},$$

que l'on réinjecte dans la seconde équation :

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan(\alpha)x}. \quad (8.12)$$

Le coefficient de x^2 étant négatif, il s'agit d'une parabole tournée vers le bas.

4. Calcul de la flèche H : à l'altitude $z = H$, la trajectoire $z(x)$ atteint un extremum. On cherche déjà l'abscisse x_f pour laquelle elle est atteinte et on calculera ensuite $H = z(x_f)$. On résout donc :

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow x_f = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g},$$

et s'ensuit immédiatement :

$$H = z(x_f) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \frac{v_0^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \tan \alpha .$$

Finalement, avec un peu de trigonométrie

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} .$$

Comme attendu, la flèche est maximale lorsque le projectile est lancé à la verticale, i.e. $\alpha = \pi/2$, et nulle lorsque $\alpha = 0$ c'est-à-dire que le projectile est lancé à l'horizontale. Elle est strictement croissante entre les deux.

5. Calcul de la portée : on doit résoudre

$$z(x_p) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_p^2 + \tan(\alpha)x_p = 0 .$$

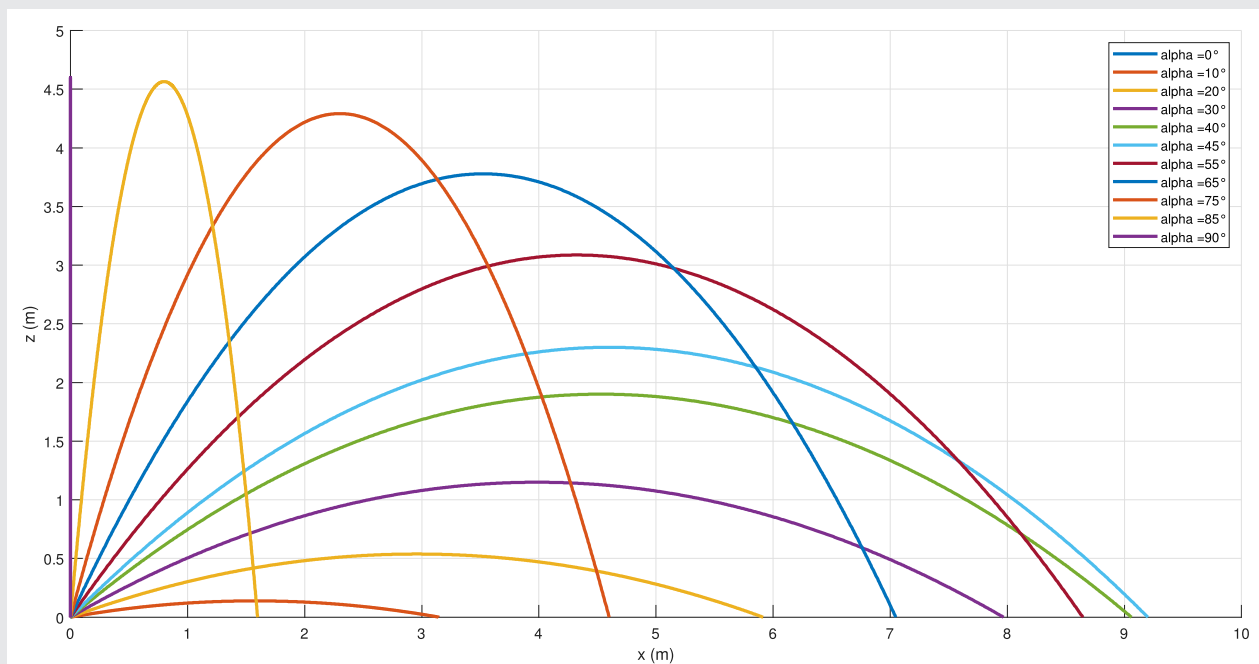
Cette équation se factorise immédiatement par x_p de sorte que les deux solutions sont évidentes :

$$x_p = 0 \quad \text{et} \quad x_p = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} .$$

La première solution correspond au point de départ, et la seconde à la portée.

Cette quantité est nulle pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ce qui est conforme à l'intuition. Elle est maximale pour $\alpha = \pi/4$.

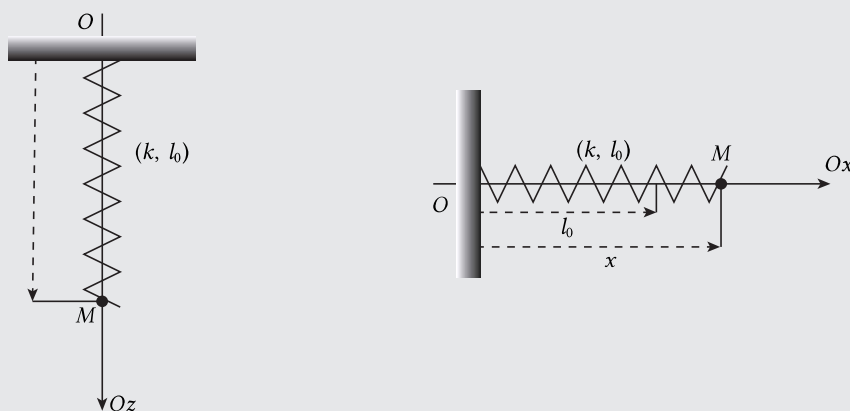
6.



a. Si $\cos \alpha = 0$ le mouvement est uniquement selon z et on est ramené au cas précédent, ce calcul n'a aucun intérêt.

Correction n°8 : Mouvements simples impliquant un ressort

Présentons le schéma des deux situations étudiées :



1. Dans ce premier cas le point M subit deux forces : son poids $\vec{P} = mg \vec{e}_z$ et la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{e}_z$ où $l = z$ dans cette situation. On peut vérifier que cette expression redonne bien le bon sens de la force lorsque le ressort est comprimé ou étendu.

Le PFD appliqué à M dans \mathcal{R} donne

$$m\ddot{z} \vec{e}_z = mg \vec{e}_z - k(z - l_0) \vec{e}_z.$$

Projeté sur \vec{e}_z , et à l'équilibre, pour lequel $\ddot{z} = 0$, il vient :

$$mg = k(z_{\text{eq}} - l_0) \quad \text{d'où} \quad z_{\text{eq}} = \frac{mg}{k} + l_0.$$

Il est important de noter que cette longueur d'équilibre est d'autant plus grande que la masse du point / la pesanteur / la longueur à vide du ressort est grande, et plus petite si la raideur k est importante. Par ailleurs, elle ne peut en aucun cas être inférieure à l_0 .

2. Cette situation est plus que classique. Le point M est soumis à trois forces : son poids à nouveau $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$, le rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_x$ et ici $l - l_0 = x$. Enfin, une réaction du support dont on discutera plus loin, \vec{R} . Le PFD, appliqué à M dans \mathcal{R} , donne

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}$$

soit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \quad \text{selon } \vec{u}_x \\ 0 &= \vec{P} + \vec{R} \quad \text{selon } \vec{u}_z \end{aligned}$$

On se rend compte d'une part que la réaction du support compense exactement le poids dans cette situation (essentiellement parce qu'il n'y pas de frottement). De plus, l'équation du mouvement est

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

ω_0 est la pulsation propre du système.

Correction n°9 : Associations de ressorts et raideur équivalente

En parallèle : Dans ce cas la masse m subit deux forces exercées par chacun des deux ressorts :

$$m\ddot{x} = -k_1(x(t) - l_1) - k_2(x(t) - l_2).$$

À l'équilibre, il vient

$$x_{\text{eq}}(k_1 + k_2) = k_1 l_1 + k_2 l_2 \Rightarrow x_{\text{eq}} = \frac{k_1 l_1 + k_2 l_2}{k_1 + k_2}.$$

Dans le cas classique où $k_1 = k_2 = k$ et $l_1 = l_2 = l_0$ on trouve donc comme attendu $x_{\text{eq}} = l_0$.

On peut alors réécrire le PFD en injectant l'expression de x_{eq} :

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_1) - k_2(x - l_2) = -(k_1 + k_2)(x(t) - x_{\text{eq}}).$$

On retient donc que lorsque associés en parallèle on a

$$l_{\text{eq}} = \frac{k_1 l_1 + k_2 l_2}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad k_{\text{eq}} = k_1 + k_2.$$

En série : On applique cette fois le PFD deux fois, en $x(t)$ et en $y(t)$ donc la masse est nulle :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -k_2(x - y - l_2), \\ 0 &= -k_1(y - l_1) + k_2(x - y - l_2). \end{cases}$$

On se place à l'équilibre pour trouver x_{eq} :

$$\begin{cases} 0 &= -k_2(x - y - l_2), \\ 0 &= -k_1(y - l_1) + k_2(x - y - l_2), \end{cases}$$

et en sommant les deux équations il vient $y_{\text{eq}} = l_1$ et $x_{\text{eq}} = l_1 + l_2$.

On peut alors noter $X(t) = x(t) - l_1 - l_2$ et $Y(t) = y(t) - l_1$ ce qui permet de réécrire les PFD :

$$\begin{cases} \ddot{X} &= -k_2(X - Y), \\ 0 &= -k_1 Y + k_2(X - Y), \end{cases}$$

La deuxième équation permet d'exprimer $Y = \frac{k_2}{k_1 + k_2} X$ que l'on peut réinjecter dans la première pour obtenir

$$\ddot{X} = \left(-k_2 + \frac{k_2^2}{k_1 + k_2} \right) X$$

$k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

On retient donc que lorsque associés en série on a

$$l_{\text{eq}} = l_1 + l_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Correction n°10 : Influence négligeable de la poussée d'Archimède de l'air

Si on veut pouvoir décrire ce problème il faut se délivrer du modèle du point matériel et étudier, par exemple, une bille de volume V et masse volumique ρ_b (donc de masse $m = \rho_b V$). Le bilan des forces se résume au poids et à la poussée d'Archimède de l'air, et dans le référentiel de la Terre, galiléen, on écrit le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi} \quad \text{d'où} \quad \rho_b V \ddot{z} = -\rho_b V g + \rho_a V g \quad \text{soit} \quad \ddot{z} = -\left(\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_b}\right)g.$$

On est donc ramené à un mouvement à accélération constante, c'est en fait une chute libre avec une pesanteur effective

$$g_{\text{eff}} = \left(\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_b}\right)g.$$

Pas besoin de résoudre puisque l'énoncé donne le temps de chute pour une chute libre, ici g est remplacée par g_{eff} et en prenant en compte la poussée d'Archimède il vient

$$\tau_{\vec{\Pi}} = \sqrt{\frac{2h}{g} \left(\frac{\rho_b}{\rho_b - \rho_a}\right)} = \tau \sqrt{\left(\frac{\rho_b}{\rho_b - \rho_a}\right)}.$$

Même avec un matériau relativement léger, comme le liège, pour lequel $\rho_b = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, avec pour l'air $\rho_a = 1,292 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ on a

$$\frac{\rho_b}{\rho_b - \rho_a} = 0.9935 \quad \text{donc} \quad \tau_{\vec{\Pi}} = 0.9968\tau.$$

La prise en compte de la poussée d'Archimède de l'air ne change donc quasiment rien.

Correction n°11 : Équilibre d'un bouchon en liège à la surface de l'eau

On note z la hauteur de bouchon immergée et l'axe z est pris ascendant. Il subit alors deux forces : sont poids $\vec{P} = -mg = -\rho_l h \pi r^2 g$ et la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = \rho_e z \pi r^2 g$. Le PFD appliqué au bouchon dans le référentiel de la Terre supposé galiléen donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi} \quad \text{d'où} \quad \rho_l h \pi r^2 \ddot{z} = -\rho_l h \pi r^2 g + \rho_e z \pi r^2 g.$$

L'équilibre est atteint lorsque le bouchon ne bouge plus, $\ddot{z} = 0$, soit

$$\rho_l h \pi r^2 g = \rho_e z_{\text{eq}} \pi r^2 g \quad \text{i.e.} \quad z_{\text{eq}} = h \frac{\rho_l}{\rho_e}.$$

Bien sûr, plus le matériau est dense (ρ_l grand) plus le bouchon s'enfonce et à l'inverse plus le fluide est dense (ρ_e grand) moins le bouchon s'enfonce. Dans le cas considéré du liège et de l'eau on a $z = 0.2h$.

Remarque : le faible enfoncement du bouchon dans l'eau favorise son basculement et sa mise à l'horizontale. Vous pouvez refaire le même calcul dans ce cas mais la géométrie complexifie un peu le raisonnement.

Correction n°12 : Freinage d'une voiture par effet de l'air

1. Selon \vec{u}_x la voiture ne subit que la force de frottement fluide $-h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{u}_x$ de sorte que par application du PFD dans le référentiel de la Terre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_x , on a :

$$m\dot{v} = -hv \quad \text{i.e.} \quad \dot{v} = -\frac{h}{m}v.$$

$m/h = \tau$ est le temps caractéristique du problème, on sera mieux en mesure de l'interpréter lorsqu'on aura

résolu l'équation du mouvement.

L'équation précédente s'intègre une fois sans problème :

$$v(t) = a \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{et} \quad v(0) = v_0 \Rightarrow a = v_0.$$

Ainsi, au sens strict la voiture ne s'arrête jamais puisqu'on n'aura pas $v(t) = 0$. Cependant, pour $t = 3\tau$ on a $v(3\tau)/v_0 = 5\%$ et pour $t = 5\tau$, $v(5\tau)/v_0 = 0,7\%$. La voiture est donc quasiment immobile et sa vitesse décroît encore.

Dans les faits, ce sont les frottements solides qui stoppent tout à fait le mouvement.

2. Une nouvelle intégration permet de remonter à l'équation horaire du mouvement : $x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$. La voiture s'arrête donc en $x_f = v_0 \tau = mv_0/h$.

Correction n°13 : Enfant glissant sur un igloo

1.

2. Le pfd s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$. Dans le repère polaire, ceci donne :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = R - mg \cos \theta \\ ma\ddot{\theta} = mg \sin \theta \end{cases}.$$

3. On multiplie la deuxième relation par $\dot{\theta}$ et on intègre entre 0 et θ . Comme $\dot{\theta}(0) = 0$, on obtient :

$$a\dot{\theta}^2/2 = mg(1 - \cos \theta).$$

4. On réinjecte dans la première relation pour finalement obtenir

$$R = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 = mg(3 \cos \theta - 2).$$

On voit que la réaction normale s'annule pour $\cos \theta_d = 2/3$. L'enfant décolle donc pour $\theta_d = \arccos 2/3 \approx 48^\circ$.

Correction n°14 : Solide sur un plan incliné

Voir DM n°1.

Correction n°15 : Effet des champs \vec{E} et \vec{B} sur le mouvement d'une particule chargée

1. Le PFD appliqué à la particule chargée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne :

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(E\vec{u}_x \wedge \vec{v}) \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases}$$

Ce système est linéaire, les équations non couplées peuvent être intégrées chacune de leur côté et font intervenir 6 constantes :

$$\begin{cases} x = A_x t + C_x \\ y = A_y t + C_y \\ z = \frac{qEt^2}{2m} + A_z t + C_z \end{cases}$$

Comme $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ et $x(t=0) = 0$ on peut calculer $C_x = C_y = C_z = 0$ et $A_x = A_y = A_z = 0$. Le mouvement

d'une particule chargée dans un unique champ \vec{E} uniforme se résume à

$$v(t) = \frac{qEt}{m} \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{qEt^2}{2m}.$$

Il est analogue à celui d'une masse dans le champ de pesanteur uniforme : c'est une parabole et la vitesse augmente en permanence.

2.

a. L'électron est soumis à la force magnétostatique qui s'exprime à partir du vecteur vitesse. Ce dernier se déduit à un instant quelconque de l'étude cinématique :

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e(\vec{v} \wedge \vec{B}) = -e(B\dot{y} - B\dot{x}).$$

On identifie donc le système recherché avec $\omega = eB/m$. Les deux premières équations sont COUPLÉES : celle sur x fait intervenir y et vice versa.

b. L'équation sur z conduit à une vitesse constante. Avec la constante d'intégration :

$$z = v_0 \sin(\alpha)t.$$

c. Pour résoudre les deux équations portant sur x et y , commençons par intégrer la seconde. Comme x et v_y sont nuls à l'instant initial d'où :

$$\dot{y} = \omega x.$$

En injectant dans la première équations il vient

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique non amorti et

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi).$$

Les conditions initiales, à nouveau, permettent de trouver :

$$x(t) = \frac{v_0 \cos(\alpha)}{\omega} \sin(\omega t).$$

La coordonnée y est obtenue de la même manière :

$$y(t) = \frac{v_0 \cos(\alpha)}{\omega} (1 - \cos(\omega t)).$$

d. Dans le plan Oxy la trajectoire est un cercle dont le rayon R est proportionnel à la vitesse initiale et à la masse de l'électron :

$$R = \frac{mv_0 \cos(\alpha)}{eB}$$

qui se combine à la translation sur l'axe z du fait de la vitesse initiale (ce mouvement n'est pas accéléré). On obtient donc une spirale.

Correction n°16 : Bille dans un tube en rotation

1. Le système est la bille étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen (!). Elle est soumise à son poids et à la réaction du support qui se compensent.

En réalité il est complexe de définir la réaction du support dans ce cas...mais peu nous importe, car nous allons

projeter sur l'unique direction où il n'y a pas de forces : la direction radiale.

On a alors d'après le pfd $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0$. On obtient donc l'équation différentielle

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

dont les solutions peuvent s'écrire sous la forme $r(t) = A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$. Comme $r(0) = d$ et $\dot{r}(0) = 0$, il vient $r(t) = d \cosh(\omega t)$.

2. On veut le temps t_{ej} tel que $L = d \cosh(\omega t_{ej})$ soit

$$t_{ej} = \frac{1}{\omega} \operatorname{argcosh}(L/d)$$

qui est bien défini car $L > d$.

3. Le ressort ajoute une force radiale de rappel $\vec{F} = -k(r - r_0)\vec{u}_r$. L'équation du mouvement est à présent

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) r = \frac{k}{m} r_0$$

Le terme de droite importe peu (on pourrait le réabsorber en définissant la position d'équilibre $r_{eq} = \frac{k/mr_0}{k/m - \omega^2}$ et en posant $x = r - r_{eq}$). Le membre de gauche est bien l'équation d'un oscillateur harmonique si $k/m > \omega^2$. Le ressort doit donc être suffisamment raide (ou la rotation suffisamment lente) pour permettre des oscillations autour de la position d'équilibre.

Correction n°17 : Propulsion d'une fusée

1.

Équation du mouvement Réalisons un bilan de quantité de mouvement. À l'instant t , tout le système a la vitesse de la fusée :

$$\vec{p}_\Sigma(t) = m(t)\vec{v}(t).$$

À l'instant $t + dt$, la fusée et les gaz restants ont une quantité de mouvement $m(t + dt)\vec{v}(t + dt)$, tandis que les gaz éjectés, de masse $D_m dt$, ont une vitesse $\vec{v}_g = \vec{v}(t + dt) + \vec{u}$, d'où :

$$\vec{p}_\Sigma(t + dt) = m(t + dt)\vec{v}(t + dt) + D_m [\vec{v}(t + dt) + \vec{u}] dt.$$

En utilisant la conservation de la masse $m(t) = m(t + dt) + D_m dt$, la variation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p}_\Sigma(t + dt) - \vec{p}_\Sigma(t) = m(t) [\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)] + D_m \vec{u} dt$$

d'où en divisant par dt et en prenant la limite $dt \rightarrow 0$,

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_\Sigma}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u}}.$$

Remarque

Il ne faudrait pas vouloir écrire trop rapidement :

$$\frac{d\vec{p}_\Sigma}{dt} = \frac{d(m(t)\vec{v}(t))}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v}(t) = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} - D_m \vec{v},$$

car cela suppose que les gaz éjectés ont une vitesse \vec{v}_g nulle. Au contraire, il faut faire attentivement un vrai bilan de quantité de mouvement.

2. On peut alors appliquer le principe fondamental de la dynamique au système fermé Σ , qui s'écrit $d\vec{p}_\Sigma/dt = \vec{F}_{\text{ext}}$, ou encore, en vertu de ce qui précède :

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} - D_m \vec{u}.$$

On identifie donc une FORCE DE POUSSÉE $\vec{F}_p = -D_m \vec{u}$. Pour une fusée décollant à la verticale, et n'étant soumise qu'à son poids $m(t)\vec{g}$, on a en projection suivant \vec{u}_z :

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t)g + D_m u. \quad (8.13)$$

La force de poussée est bien verticale ascendante, et lutte contre la pesanteur.

3. La condition de décollage s'écrit $dv/dt > 0$, d'où :

$$-m_0 g + D_m u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_m u > m_0 g.$$

Le choix du carburant impose la vitesse d'éjection, et on peut comparer les avantages et inconvénients de divers modes de propulsion : chimique, ionique (Le carburant, au lieu d'être brûlé, est *ionisé*. Les ions formés sont alors accélérés via des grilles chargées, et la conservation de la quantité de mouvement conduit à une force de propulsion opposée à cette accélération).

4.

- En consommant successivement le carburant de chacun des deux étages, on a d'abord :

$$\Delta v_1 = 4 \times \ln\left(\frac{134}{34}\right) \approx 5,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

puis le largage du premier étage vide se fait sans gain de vitesse (car sa vitesse d'éjection est nulle) et enfin l'utilisation du carburant du deuxième étage confère

$$\Delta v_2 = 4 \times \ln\left(\frac{24}{4}\right) \approx 7,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Si la même fusée était construite en un seul étage (mêmes quantités d'ergols et de structure), on aurait :

$$\Delta v = 4 \times \ln\left(\frac{134}{14}\right) \approx 9,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} < \Delta v_1 + \Delta v_2.$$

L'intérêt de construire les fusées par étage est de les larguer successivement afin de diminuer la masse restante à propulser.

Correction n°18 : Champ de gravitation engendré par un corps à symétrie sphérique

1. L'analogie se retrouve aisément en se rappelant l'expression des force

$$\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r, \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\text{grav}} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r.$$

On a donc notamment $q \leftrightarrow m$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -\mathcal{G}$ et $\vec{E} \leftrightarrow \vec{G}$.

2. Le théorème de Gauss gravitationnel appliqué à une surface fermée sphérique centrée sur le centre de l'astre et de rayon r ,

$$\oiint \vec{G} d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} m_{\text{int}}.$$

La symétrie sphérique permet d'affirmer que \vec{G} est selon \vec{u}_r et indépendant de θ et φ . De plus, la valeur de m_{int} dépend de la comparaison de r par rapport à R :

- si $r > R$, on a $m_{\text{int}} = m$ et le théorème de Gauss donne

$$4\pi r^2 \vec{G}(r) = -4\pi \mathcal{G} m,$$

- si $r < R$, on a $m_{\text{int}} = m r^3/R^3$ et le théorème de Gauss donne

$$4\pi r^2 \vec{G}(r) = -4\pi \mathcal{G} m \frac{r^3}{R^3}$$

Ainsi,

$$\vec{G}(r) = \begin{cases} -\mathcal{G} \frac{mr}{R^3} \vec{u}_r & \text{si } r < R \\ -\mathcal{G} \frac{m}{r^2} \vec{u}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

3. On constate donc que pour $r > R$ le champ est exactement le même que celui engendré par un point matériel de masse m placé au centre de l'astre. Autrement dit, la symétrie sphérique garantit qu'en dehors du solide le modèle du point matériel permet d'obtenir des résultats exacts.

Correction n°19 : Livraison d'un colis par avion

1. Il s'agit d'une application simple de la balistique sans frottements : les équations horaires sont

$$x(t) = v_0 t \quad \text{et} \quad z(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2.$$

On en déduit le temps de chute t_0 tel que $z(t_0) = 0$, soit $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$, et donc la distance parcourue horizontalement $D = v_0 \sqrt{2h_0/g} \approx 280$ m. À ce moment, la vitesse totale vaut

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_0^2 + \left(g \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)^2} \approx 102 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. En présence de frottements $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$, il faut soigneusement intégrer les équations du mouvement. On pose $\tau = m/\lambda$. On a

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -\frac{z}{\tau} - g.$$

On peut intégrer ces deux équations une première fois pour obtenir \dot{x} et \dot{z} .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K e^{-t/\tau} = v_0 e^{-t/\tau} \\ \dot{z}(t) = K' e^{-t/\tau} - g\tau = g\tau(e^{-t/\tau} - 1) \end{cases}$$

Pour obtenir \dot{x} , on a utilisé la condition initiale $\dot{x}(0) = v_0$. Pour \dot{z} , on a ajouté la solution générale de l'équation sans second membre à une solution particulière $-g\tau$ et utilisé $\dot{z}(0) = 0$.

On peut à présent intégrer une seconde fois

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \\ z(t) = g\tau (-\tau e^{-t/\tau} - t) + K'' \end{cases}$$

Dans la première ligne on a utilisé que $x(0) = 0$. Enfin, on veut $z(0) = h_0$ soit $-g\tau^2 + K'' = h_0$. On peut présenter le résultat sous la forme

$$z(t) = h_0 + g\tau^2 \left(1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau}\right).$$

À présent, il est nécessaire de faire des hypothèses : on veut résoudre $z(t_0) = 0$ pour trouver le temps de chute, ce qui n'est pas possible analytiquement. On peut remarquer que $\tau = 2$ s, et supposer que le temps de chute est grand devant $2s$ (il en valait déjà presque 10 pour la chute sans frottements). On écrit donc que $t_0/\tau \gg 1$, ce qui permet de négliger l'exponentielle et le 1 devant $-t/\tau$. On a alors

$$h_0 - g\tau^2 \frac{t_0}{\tau} = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{h_0}{g\tau}$$

Numériquement, $t_0 \approx 25$ s, donc l'approximation est justifiée.

On en déduit la distance de chute $x(t_0) = D \approx v_0\tau = \frac{h_0 v_0}{g\tau} = 694$ m, et la vitesse finale $v_f \approx gt_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On trouve bien une distance parcourue plus grande et une vitesse finale plus faible, ce qui est conforme à l'intuition physique.

Correction n°20 : Comportement d'un système masses - poulie - frottements

1. On étudie S_2 soumis à son poids $m_2 \vec{g}$ et à la tension \vec{T}_2 du fil. Pfd selon l'axe z vertical : $m_2 \ddot{z}_2 = T_2 - m_2 g$. On étudie S_1 soumis à son poids $m_1 \vec{g}$, la réaction normale de la table \vec{R}_N et à la tension \vec{T}_1 du fil. On se dote d'un axe x_1 le long de la pente. Pfd projeté selon \vec{e}_{x_1} : $m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 + m_1 g \sin \alpha$.

On somme ensuite ces deux équations, et on remarque que comme le fil est tendu et inextensible, d'une part $T_1 = T_2$, d'autre part $\ddot{z}_2 = \ddot{x}_1$. On obtient donc

$$(m_1 + m_2) \ddot{z}_2 = (m_1 \sin \alpha - m_2) g \Rightarrow \ddot{z}_2 = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g = \kappa$$

Le solide S_2 tombe si $\ddot{z}_2 < 0$, il faut donc que $m_2 > m_1 \sin \alpha$.

Il s'agit d'un mouvement à accélération constante : on a $z_2(t) = h + \frac{1}{2} \kappa t^2$ et $\dot{z}_2(t) = \kappa t$. La chute dure donc un temps $t_f = \sqrt{2h/\kappa}$ et la vitesse à l'arrivée est de $v_f = \sqrt{2\kappa h}$.

2. En cas de présence de frottements solides au niveau de S_1 , il faut également prendre en compte la réaction tangentielle du support \vec{R}_T .

L'équation pour S_2 reste la même : $m_2 \ddot{z}_2 = T_2 - m_2 g$.

Pour S_1 , en supposant que le mouvement se fait en remontant la pente, \vec{v}_1 est selon $-\vec{u}_{x_1}$ donc la réaction tangentielle est selon \vec{u}_{x_1} . L'équation devient

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 + m_1 g \sin \alpha + R_T$$

Par ailleurs, l'équation sur l'autre axe (perpendiculaire à x_1) s'écrit $R_N - m_1 g \cos \alpha = 0$, et les lois de Coulomb (glissement) donnent $R_T = \mu R_N$. On a donc finalement

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 + m_1 g \sin \alpha + \mu m_1 g \cos \alpha$$

De la même manière qu'au 1., on a $\ddot{x}_1 = \ddot{z}_2$ et $T_1 = T_2$. On en déduit alors l'équation du mouvement pour le solide S_2

$$\ddot{z}_2 = \frac{(m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

et il y a mouvement dès lors que $m_2 > m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$.

Corrections du chapitre 3

Correction n°21 : Caractère conservatif du poids et de la force de rappel d'un ressort

On démontre facilement qu'avec pour énergie potentiel de pesanteur (associée au poids)

$$E_{p,pes} = -mgz + \text{cste},$$

on a bien $\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p,pes})$.

De même avec l'énergie élastique (associée au rappel du ressort)

$$E_{p,el} = -\frac{1}{2}k(x - l_0)^2,$$

on vérifie $\vec{F}_{\text{rappel}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p,el})$.

Correction n°22 : Un calcul de travail

De O à C via A : On calcule le travail en deux morceaux : de O à A on intègre $\vec{F}(x, 0) \cdot (dx \vec{u}_x)$ de 0 à p puis de A à C on intègre $\vec{F}(p, y) \cdot (dy \vec{u}_y)$ de 0 à p . Ainsi,

$$\begin{aligned} W_{OAC}(\vec{F}) &= \int_0^p dx \vec{F}(x, 0) \cdot \vec{u}_x + \int_0^p dy \vec{F}(p, y) \cdot \vec{u}_y \\ &= \int_0^p dx \alpha(-x^2) + \int_0^p dy \alpha 3py \\ &= -\alpha \frac{p^3}{3} + 3\alpha p \frac{p^2}{2} = \frac{7\alpha p^3}{6}. \end{aligned}$$

De O à C via B : On calcule le travail en deux morceaux : de O à B on intègre $\vec{F}(0, y) \cdot (dy \vec{u}_y)$ de 0 à p puis de B à C on intègre $\vec{F}(x, p) \cdot (dx \vec{u}_x)$ de 0 à p . Ainsi,

$$\begin{aligned} W_{OBC}(\vec{F}) &= \int_0^p dy \vec{F}(0, y) \cdot \vec{u}_y + \int_0^p dx \vec{F}(x, p) \cdot \vec{u}_x \\ &= \int_0^p dy \times 0 + \int_0^p dx \alpha(p^2 - x^2) \\ &= \alpha \left(p^3 - \frac{p^3}{3} \right) = \frac{2\alpha p^3}{3}. \end{aligned}$$

De O à C directement : Le calcul est un peu plus compliqué. On suit la droite $y = x$, ce qui est pratique, et $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$ et $dx = dy$:

$$\begin{aligned} W_{OC}(\vec{F}) &= \int_O^C \vec{F}(x, x) \cdot (dx \vec{u}_x + dx \vec{u}_y) \\ &= \int_0^p dx (\alpha(x^2 - x^2) + 3xx) \\ &= \int_0^p 3x^2 = p^3. \end{aligned}$$

En calculant le travail entre deux mêmes points sur trois chemins différents on trouve trois valeurs différentes. On en déduit que la force n'est pas conservative.

Correction n°23 : Retour sur le pendule simple

L'énergie cinétique du pendule simple vaut

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2.$$

Le poids est une force conservative et l'énergie potentielle de pesanteur vaut

$$E_{pp} = mg(z - z_0) = mgl(1 - \cos \theta).$$

La tension du fil, perpendiculaire au mouvement, ne travaille pas. L'énergie mécanique est donc conservée, et ainsi :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = ml^2 \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Correction n°24 : Looping!

1. Entre le début de la chute et le bas du looping, en l'absence de frottement, on peut appliquer la conservation de l'énergie mécanique (on définit l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en A) :

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow \Delta E_p = -\Delta E_c \quad \text{donc} \quad -mgh = -\frac{1}{2} m v_A^2 \quad \text{et} \quad v_A = \sqrt{2gh}.$$

Puis entre le point A et le point M repéré par l'angle θ , on a

$$E_m(A) = E_m(M) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} m v_A^2 = m g R (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2.$$

On en déduit

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R^2} (h - R(1 - \cos \theta))}.$$

2. On applique le PFD au point M dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids et à la réaction du support qui se réduit à sa composante normale du fait de l'absence de frottements. De plus, on a vu en cinématique que dans ce cas d'un mouvement circulaire non uniforme l'accélération a deux composantes : $\vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$. Ainsi,

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

La première relation donne donc

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = \frac{2mg}{R}(h - R) + 3mg \cos \theta.$$

3. Il est clair que si h et R sont fixés, la fonction $N(\theta)$ est minimale lorsque $\cos \theta$ l'est, donc en $\theta = \pi$. Pour que la bille fasse un tour complet sans tomber, il faut donc que $N(\pi) > 0$, ce qui donne tous calculs faits

$$N = \frac{2mgh}{R} - 5mg > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{h}{R} > \frac{5}{2}}.$$

On remarque que pour faire le tour complet (sans frottement !) il suffit de partir un tout petit plus haut que le sommet de l'anneau.

4. Dans le cas où h est trop faible, on aura $N = 0$ dès lors que

$$\frac{2mg}{R}(h - R) + 3mg \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{h}{R} \right).$$

On note que, comme a priori $h/R > 1$, $\cos \theta < 0$ ce qui prouve que $\theta \in [\pi/2, \pi]$, qui est cohérent avec l'intuition physique.

Correction n°25 : Voyage au centre de la Terre

Correction n°26 : Pendule avec frottements

Bien qu'il y ait présence de frottements, on va utiliser un bilan d'énergie mécanique entre les deux positions extrêmes.

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W(\vec{f})$$

La variation d'énergie cinétique, on passe de deux positions extrêmes où la vitesse est nulle : $\Delta E_c = 0$.

Le calcul de l'énergie potentielle demande de faire attention aux angles. Il faut d'abord calculer la distance sur le plan incliné puis projeter par rapport à la verticale. Les distances le long de la ligne de plus grande pente valent respectivement $l(1 - \cos \alpha)$ et $l(1 - \cos \beta)$. Pour projeter sur la verticale pour obtenir des altitudes, on multiplie par $\sin \gamma$ (si $\gamma = 0$ on est à plat donc pas d'énergie de pesanteur, si $\gamma = \pi/2$ on est vertical et il s'agit du calcul habituel pour le pendule simple). On en déduit donc

$$\Delta E_p = mgl(1 - \cos \beta) \sin \gamma - mgl(1 - \cos \alpha) \sin \gamma = mgl(\cos \alpha - \cos \beta) \sin \gamma$$

on vérifie rapidement que comme $\beta < \alpha$, on a bien $\Delta E_p < 0$ qui correspond bien au fait que le point est plus bas en altitude.

En ce qui concerne le frottement, il y a glissement donc $\|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\|$. Par ailleurs, N équilibre le poids projeté selon $-mg \cos \alpha$. On a donc $T = \mu mg \cos \gamma$, opposé à la vitesse. Le travail effectué vaut donc

$$W(\vec{T}) = \int_{\alpha}^{\beta} -\mu mg \cos \gamma \, dl = -\mu mg \cos \gamma \int_{\alpha}^{\beta} dl = -\mu mgl(\alpha + \beta) \cos \gamma$$

car le chemin parcouru sur un arc de cercle vaut $\alpha + \beta$.

Finalement, le théorème de l'énergie mécanique donne

$$mgl(\cos \alpha - \cos \beta) \sin \gamma = -\mu mgl(\alpha + \beta) \cos \gamma \Rightarrow \mu = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\alpha + \beta} \tan \gamma$$

Cohérence de la formule : $\beta < \alpha$ donc $\cos \beta > \cos \alpha$.

Correction n°27 : Distance d'arrêt d'une voiture

On sait peu de chose des frottements solides si ce n'est que lorsqu'il y a glissement, ils sont constant. Ainsi s'il faut 40 m pour dissiper l'énergie d'une voiture roulant $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ il faudra une distance proportionnelle pour dissiper l'énergie d'une voiture roulant à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Or

$$\frac{E_c(80)}{E_c(50)} = \frac{80^2}{50^2} = 2.56.$$

La vitesse étant multipliée par 1,6, la distance d'arrêt sera, elle multipliée par $1.6^2 = 2.56$ du fait du carré sur v dans l'énergie cinétique. La voiture roulant à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ s'arrêtera donc au bout de 102,4 m.

Corrections du chapitre 4

Correction n°28 : Importance du bras de levier

On a

$$\vec{\mathcal{M}}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = AM \|\vec{F}\| \sin \theta \vec{u},$$

avec θ l'angle entre \overrightarrow{AM} et \vec{F} , et \vec{u} le vecteur unitaire normal au plan. Comme $AM \sin \theta = d$ on conclut

$$\vec{\mathcal{M}}_A(M) = \|\vec{F}\| d \vec{u}.$$

Ainsi on maximise bien le moment de la force en augmentant d , ce qui, d'après le théorème du moment cinétique, est le meilleur moyen de mettre M en rotation.

On a donc intérêt, pour faire tourner un solide, à appliquer la force le plus loin possible de l'axe de rotation, et perpendiculairement à \overrightarrow{AM} . C'est généralement ce qu'on fait, notamment sur les portes.

Correction n°29 : Encore (!) une méthode pour le pendule simple

Dans un premier temps on exprime le moment cinétique du point matériel M constituant le pendule. Il est cohérent de se placer pour cela dans le repère polaire de centre O , point d'attache du pendule fixe dans le référentiel \mathcal{R} d'étude supposée galiléen. On a alors, le mouvement étant circulaire (mais non uniforme)

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = ml \vec{u}_r \wedge l \dot{\theta} \vec{u}_\theta = ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_z.$$

Reste à calculer le moment des forces qui s'exercent, à savoir le poids et la tension du fil :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{T} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{OM}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l \vec{u}_r \wedge mg(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle du pendule avec la verticale} \\ &= -lmg \sin \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

En vertu du théorème du moment cinétique appliqué par rapport au point O ,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} &= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) \\ ml^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z &= -lmg \sin \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\text{d'où en projection sur } \vec{u}_z, \quad \ddot{\theta} + \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \theta = 0$$

On reconnaît bien l'équation du mouvement du pendule simple, avec $\omega_0^2 = g/l$.

Correction n°30 : Étude du pendule pesant

1. Le moment cinétique du pendule par rapport à Δ est $L_\Delta = I_\Delta \Omega$. Le moment du poids par rapport à O est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m \vec{g} = -mga \sin \theta \vec{u}_z \quad \text{où } a = OG.$$

Par définition d'une LIAISON PARFAITE le moment de la liaison en O est nul. Par application du théorème du moment cinétique par rapport à Δ on a finalement

$$I_\Delta \ddot{\theta} = -mga \sin \theta.$$

2. La liaison étant parfaite sa réaction ne travaille pas. Comme de plus le poids est conservatif, le théorème de l'énergie mécanique impose que E_m est constante. Or, $E_c = I_\Delta \dot{\theta}^2 / 2$ et $E_p = -mga \cos \theta$. On obtient l'équation du mouvement en dérivant l'énergie mécanique : $dE_m / dt = 0$.

3. Aux petits angles on peut linéariser le sinus en $\sin \theta \approx \theta$. L'équation du mouvement se ramène donc à

$$\ddot{\theta} = \frac{mga}{I_\Delta} \theta.$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont la pulsation propre est $\omega_0^2 = mga / I_\Delta$. Pour rappel celle du pendule simple est $\omega_0^2 = g/l$ qui est cohérente puisque dans le cas du pendule simple, par définition de I_Δ , $I_\Delta = ma^2$. Ainsi, lorsqu'on veut prolonger les résultats du pendule pesant, qui est généralement le pendule réel utilisé en TP, on a intérêt à accumuler une grande masse en un point, et à équilibrer la tige (faire coïncider G à O).

Correction n°31 : Bille dans une cuvette de potentiel

Cette exercice est parfaitement équivalent au pendule simple. On considère la bille de masse m dans la cuvette. Elle évolue à une distance constante R du centre O de la demi-sphère. On se place dans le cas où la bille est lâchée sans vitesse initiale (donc les oscillations se feront dans un plan unique), ce qui permet d'utiliser les coordonnées polaires sur une coupe de la sphère.

Moment cinétique en O :

$$\vec{L}_O(M) = R \vec{u}_r \wedge ml \dot{\theta} \vec{u}_\theta = mR^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

Moment en O du poids :

$$\vec{M}_O(m \vec{g}) = R \vec{u}_r \wedge -mg \vec{u}_y = -mgR \underbrace{\vec{u}_r \wedge \vec{u}_y}_{\sin \theta \vec{u}_z} = -mgR \sin \theta \vec{u}_z$$

Et l'application du théorème du moment cinétique sur l'axe (Oz) donne alors

$$mR^2 \ddot{\theta} = -mgR \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

En linéarisant pour les petites oscillations, $\sin \theta \sim \theta$ et on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique. La période des petites oscillations vaut donc $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

Correction n°32 : Basculement ou glissement d'un pavé ?

1. Le mouvement le plus classique est celui de GLISSEMENT : si la force F est suffisante, le solide glisse sur le plan : G a un mouvement de translation. Si au contraire la force F est trop faible, c'est-à-dire dans cette

situation simple tant que $F \leq fmg$, le pavé reste immobile (on parle de NON-GLISSEMENT). Dans cette situation d'équilibre, la projection du PFD sur \vec{u}_x et \vec{u}_z donne :

$$N = mg \quad \text{et} \quad F = T.$$

2. l'équilibre des forces étant écrit, le point d'application I de la résultante de \vec{R} (commun à \vec{T} et \vec{N}) est obtenu en écrivant l'équilibre des moments des forces. Le point le plus adéquat est le point I , ce qui permet d'annuler $\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{N}) = \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{T}) = \vec{0}$. Il vient :

$$\vec{0} = \sum \vec{\mathcal{M}}_I = \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{F}) = -(mgx - Fz) \vec{u}_y,$$

d'où la relation :

$$x = \frac{F}{mg} z.$$

L'équilibre des moments permet donc de trouver la position du point I auquel on peut ramener la force de réaction du support même si, bien sûr, les véritables forces de contact continuent à s'appliquer sur l'ensemble de la surface. Plusieurs remarques s'imposent sur cette expression de x :

- Si on ne tire pas sur le pavé ($F = 0$), le point I est la projection de G sur la surface de contact.
- Si on tire sur la droite du pavé, le point d'application de la force est à droite de G . Si on pousse ($F < 0$), le point d'application est à gauche de G .
- Plus le pavé est lourd, moins le point d'application s'écarte de la verticale de G .

3. Si $|x| > a/2$, le point d'application I sort de la surface de contact entre les deux solides ce qui est impossible pour l'application d'une force de contact. L'équilibre des moments est nécessairement rompu et le solide BASCULE. La condition de basculement s'écrit ainsi

$$\frac{|F|}{mg} z > \frac{a}{2} \quad \text{soit} \quad z > \frac{mga}{2|F|}.$$

Le basculement a lieu vers la droite si $x > a/2$ — soit $F > 0$ — et vers la gauche si $x < -a/2$ — soit $F < 0$. Cette condition est d'autant plus difficile à remplir que le pavé est large (a grand) et lourd (m élevée).

Pour avoir $F = T$ alors que le pavé est immobile, on doit avoir $|F| \leq fN$. Si la force F dépasse cette limite, on aura alors glissement au lieu du basculement.

Corrections du chapitre 5

Correction n°33 : Oscillations d'un bouchon

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au bouchon dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne :

$$m\ddot{x} = mg - \rho_e S z g$$

En notant $\xi = z - z_{\text{eq}}$ (qui est bien la grandeur cinématique qui a du sens ici) on réécrit : $m\ddot{\xi} = -\rho_e S g \xi$ et comme $m = \rho_l S h$, on a finalement

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0,$$

avec $\omega^2 = \frac{\rho_e g}{\rho_l h}$, et bien sûr $T = 2\pi/\omega$.

Correction n°34 : Viscosimètre à bille oscillante

1. Le PFD appliqué à la sphère s'écrit (en posant $x = l - l_0$) :

$$m\ddot{x} = -kx - 6\pi\eta r \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{6\pi\eta r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

On pose donc $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta r}{m}$. Ainsi, $Q = \frac{\sqrt{km}}{6\pi\eta r}$

Remarque : On aurait pu ne pas négliger l'effet du poids, ce qui aurait simplement ramené l'étude autour de l_{eq} au lieu de l_0 (cf. un exercice précédent sur les ressorts).

2. D'après le cours ci-dessus, il y a oscillations si on est dans le régime pseudo-périodique, c'est-à-dire que le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation du mouvement est négatif :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0 \Rightarrow Q > 1/2 \Rightarrow \eta < \frac{\sqrt{km}}{3\pi r}.$$

Il n'est pas étonnant de constater que les oscillations ont lieu si la viscosité n'est pas trop grande !

3. On sait dans ce cas (cf. à nouveau le cours) que la pseudo-pulsation s'écrit :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{9\pi^2 \eta^2 r^2}{m^2}},$$

et on a $T = 2\pi/\omega$.

4. Dans l'air, sans frottements, on a bien sûr $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Mettant au carré l'équation précédente, on obtient

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} - \frac{9\pi^2 \eta^2 r^2}{m^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{9\pi^2 \eta^2 r^2}{m^2},$$

et quelques manipulations calculatoires simples mènent finalement à

$$\eta = \frac{2m}{3r} \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}.$$

Le résultat est cohérent car la viscosité fait augmenter la pseudo-période (plus difficile de se mouvoir), donc $T > T_0$ et la quantité sous la racine est bien positive. Ce calcul met en évidence un bon dispositif de mesure de la viscosité!

Correction n°35 : Oscillateur amorti par frottements solides

1.

a. Les forces qui s'exercent sur el mobile sont :

- son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$,
- le rappel du ressort $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$,
- la résultante des forces de contact \vec{R} décomposée selon

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}.$$

Le contact est garanti si $\vec{N} = N\vec{u}_z$ avec $N > 0$, et le ressort tirant vers la gauche la composante tangentielle est vers la droite : $\vec{T} = T\vec{u}_x$, avec $T > 0$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen s'écrit immédiatement en projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + T, \\ 0 &= -mg + N. \end{aligned}$$

b. La deuxième équation permet d'exprimer $N = mg$. La première phase du mouvement dépend du rapport entre la force de rappel et la composante tangentielle. Tant que $kx_0 \leq fmg$, c'est-à-dire $x_0 \leq fmg/k$ on peut vérifier l'inégalité $T = kx_0 \leq fmg = fN$ sans contredire la loi d'Amontons-Coulomb sur le frottement statique : le non-glissement persiste, le mobile reste immobile. Cela permet d'énoncer le critère d'arrêt de l'oscillateur du système :

$$\dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad x \in [-p, p] \quad \text{où} \quad p = \frac{fmg}{k}. \quad (8.14)$$

On constate donc que l'oscillateur peut s'arrêter en un point $x \neq 0$. On parle de **PLAGE D'ARRÊT**.

Remarque

Cette plage d'arrêt peut s'avérer problématique pour un certain nombre de capteurs dont l'indicateur est mécanique. Prenons pour exemple une balance dont l'aiguille pointe une masse m_0 lorsqu'elle s'arrête à la position θ_0 . Lorsqu'on dépose une telle masse sur la balance l'aiguille oscille brièvement autour de θ_0 et interrompt son mouvement en une position θ qui peut différer de θ_0 du fait de la plage d'arrêt de l'oscillateur à frottements solides.

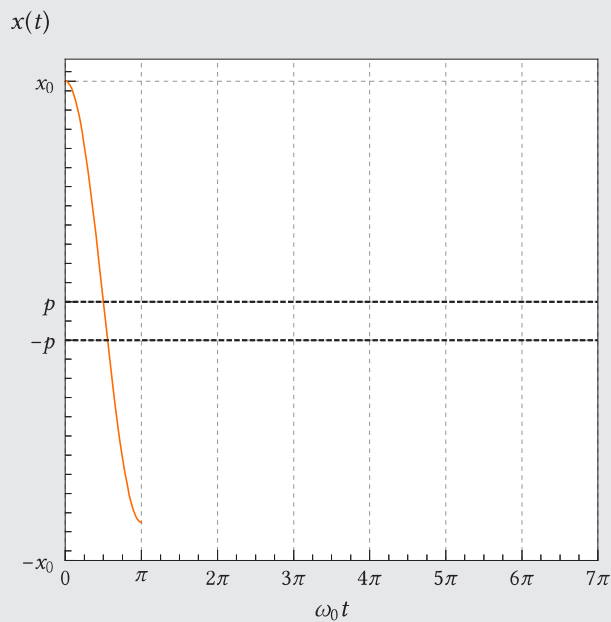
c. Si au contraire $x_0 > p$, la force de rappel est trop forte pour être compensée par le frottement, le glissement commence. On change alors de cas d'application de la loi d'Amontons-Coulomb et on peut écrire $T = fN = fmg$ de sorte que l'équation du mouvement est

$$m\ddot{x} = -kx + fmg \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = fg$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0^2 = k/m$ excentré. En effet, si la solution homogène reste $x_{\text{hom}}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ on doit lui ajouter une solution particulière qui vaut $x_{\text{part}}(t) = p = fg/\omega_0^2$. La solution générale, satisfaisant aux conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ est

$$x(t) = (x_0 - p) \cos(\omega_0 t) + p,$$

de sorte que l'oscillation se fait de manière complètement sinusoïdale mais autour de p . Cette première phase est représentée graphiquement sur la figure suivante.



2. La même dichotomie qu'à l'instant initial s'applique.

- Si le mobile est dans la plage d'arrêt la force de rappel n'est pas suffisante, le solide reste immobile et les oscillations s'arrêtent.
- Si au contraire le rappel du ressort est suffisant pour mettre le solide en mouvement, il reprend son oscillation harmonique mais cette fois le ressort tire vers la droite et la vitesse change de sens. Pour vérifier $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$, \vec{T} se retourne à son tour : $\vec{T} = -T\vec{u}_x$, avec $T > 0$. Le principe fondamental de la dynamique donne sur \vec{u}_z que $N = mg$ et sur \vec{u}_x :

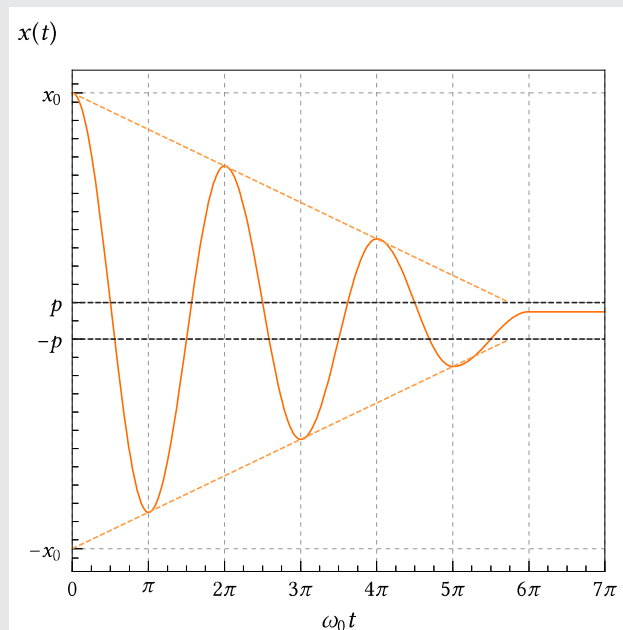
$$m\ddot{x} = -kx - T.$$

Avec les lois d'Amontons-Coulomb utilisées dans le cas du glissement, $T = fN = fmg$ et la nouvelle équation du mouvement est

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg.$$

La branche de sinuséide est donc centrée cette fois sur $-p$.

La même démarche s'applique jusqu'à ce que le mobile s'arrête quelque part dans la plage d'équilibre. Dès que cette condition est remplie, le mouvement s'arrête pour de bon. La trajectoire de l'oscillateur amorti par frottement solide au cours du temps peut ainsi être complétée comme présenté sur la figure ci-dessous.



3. Le point de départ initial est en x_0 et on a montré que l'extrémité suivante était en $-x_0 + 2p$. L'équation de la deuxième branche de sinusoïde est ^a $x(t) = B \cos(\omega_0 t) - p$ et doit vérifier $-B - p = -x_0 + 2p$ de sorte que $B = -x_0 - p$ et le prochain extrema est en $B - p = x_0 - 2p$, etc. La position du n -ième maximum est donc donné par $M_n = x_0 - 2np$ et celle du n -ième minimum est $m_n = -x_0 + 2np$. L'un et l'autre suivent donc une suite arithmétique qui se traduit par une fonction affine du temps.

Les oscillations de l'oscillateur amorti par frottements fluides sont donc enveloppées par des droites comme on peut le voir sur la figure précédente.

Attention !

On retiendra quatre différences majeures avec l'oscillateur amorti par frottements fluides.

1. Il existe une plage de positions d'équilibre, et non une position d'équilibre unique.
2. Le solide s'arrête en un temps fini, tandis qu'il faut un temps infini à l'oscillateur amorti par frottements fluides pour que les oscillations cessent ^a.
3. La décroissance de l'amplitude des oscillations est linéaire et non exponentielle.
4. Les oscillations (tant qu'elles ont lieu) de l'oscillateur amorti par frottements solides se font toujours à la pulsation propre du système ω_0 tandis que celles de l'oscillateur amorti par frottements fluides en régime pseudo-périodique se font à $\omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$.

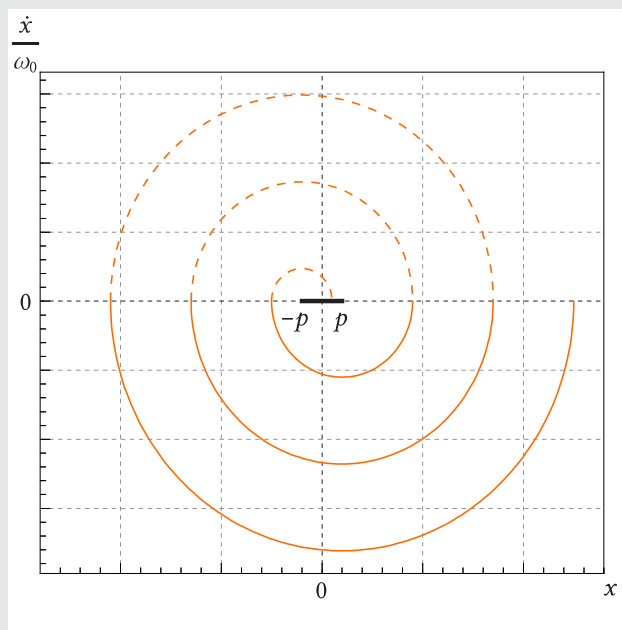
^a. En pratique, il y aura toujours une source de dissipation qui arrêtera les oscillations d'un oscillateur en un temps fini.

4. On a établi les équations du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{lorsque } \dot{x} < 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg \quad \text{lorsque } \dot{x} > 0.$$

Les trajectoires dans le plan de phase sont des arcs de cercles successivement centrés sur fg dans la partie $\dot{x} < 0$ (demi-espace du bas) et sur $-fg$ lorsque $\dot{x} > 0$ (demi-espace du haut). Cette succession continue jusqu'à ce que l'oscillateur atteigne la plage d'équilibre et s'y arrête.



a. Pour le calcul dans cette deuxième branche, on change l'origine des temps de sorte que $t = 0$ coïncide avec l'extremum $-x_0 + 2p$.

Correction n°36 : Étude d'un oscillateur à partir de son portrait de phase

1. Le PFD appliqué au point M donne (on pose $X = l - l_0$) :

$$m\ddot{X} = -kX - \alpha\dot{X} + F_c \quad \text{ou} \quad \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_0$$

avec $\omega_0^2 = k/m$, $Q = \sqrt{km}/\alpha$ et $X_0 = F_c/k$.

2. La solution est pseudo-périodique si $Q > 1/2$. Ici on aura deux termes dans la solution $x(t)$: la solution homogène $x_H(t) = e^{-t/\tau}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ avec $\tau = 2Q/\omega_0$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$; et une solution particulière $x_P(t) = X_0$.

3.

a. Le portrait de phase est une spirale décroissante vers 0. Il s'agit donc d'un mouvement pseudo-périodique (cf. cours).

b. Au début du mouvement, $x_0 = 0$ et $v_0 = 2,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. À la fin, $x_F = 2 \text{ cm}$ et $v_F = 0$.

c. La vitesse maximale atteinte est $17 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et l'allongement maximal atteint 3,5 cm.

d. En moyenne $T = 0,66 \text{ s}$, donc $\omega = 9,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

e. Par périodicité des fonctions sin et cos, le décrement logarithmique vaut

$$\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

Graphiquement, la première amplitude max vaut 3,5 cm, la quatrième est autour de 2,13 cm (une demi-graduation). On retire $X_0 = 2 \text{ cm}$ (x_B dans l'énoncé) pour avoir la variation de position. On en déduit $\delta \approx \ln(10)/3 = 0,77$. Puis on a $\tau = T/\delta \approx 0,86 \text{ s}$.

f. On a deux relations

$$\frac{\omega_0 T}{2Q} = \delta \quad \text{et} \quad \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \Omega.$$

En divisant la première par la deuxième, il vient :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2}} \approx 4.1.$$

Cette valeur est cohérente avec le fait qu'on observe sur le portrait de phase environ 4 périodes. On en déduit ensuite $\omega_0 = 2Q\delta/T \approx 9,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

g. Finalement, on a les relations

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \quad \text{et} \quad X_0 = F_c/m,$$

qui mènent, avec un peu de travail, à :

$$\alpha = \frac{m\omega_0}{Q} \approx 0,47 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad k = m\omega_0^2 \approx 18,4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad F_c = kX_0 \approx 0,37 \text{ N}.$$

Corrections du chapitre 6

Correction n°37 : Étude d'une suspension de voiture

1.

a. Le système est soumis à trois forces :

- a force de rappel élastique $\vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - z_s - l_0)\vec{u}_z$;
- son poids : $\vec{P} = -Mg\vec{u}_z$;
- la force de frottements fluides $\vec{F}_{fl} = -\gamma(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z$.

L'application du PFD dans le référentiel du laboratoire donne :

$$M\ddot{z} = -k(z - z_s - l_0) - Mg - \gamma(\dot{z} - \dot{z}_s) \quad \text{i.e.} \quad \ddot{z} + \frac{k}{M}\left(z - l_0 + \frac{M}{k}g\right) + \frac{\gamma}{M}\dot{z} = \frac{k}{M}z_s + \frac{\gamma}{M}\dot{z}_s.$$

C'est bien la forme canonique proposée par l'énoncé avec

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{M} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M} \quad \text{et} \quad l_1 = l_0 - \frac{Mg}{k}.$$

2. Si $y(t) = z(t) - l_1$, $\ddot{z} = \ddot{y}$ et $\dot{z} = \dot{y}$ donc y vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{y} + \frac{1}{\tau}\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{1}{\tau}\dot{z}_s + \omega_0^2 z_s.$$

On obtient donc une équation différentielle linéaire, du second ordre, dont le second membre

$$\frac{1}{\tau}\dot{z}_s + \omega_0^2 z_s = -\frac{\omega}{\tau}\sin(\omega t) + \omega_0^2 \cos(\omega t)$$

est sinusoïdal de pulsation ω . Il va donc s'instaurer un régime permanent (dit *régime sinusoïdal forcé*) à la même pulsation : $y(t) = Y \cos(\omega t + \Phi)$.

Avec la notation complexe l'équation différentielle devient

$$(\omega)^2 \underline{Y} + \frac{j\omega}{\tau} \underline{Y} + \omega_0^2 \underline{Y} = \frac{j\omega}{\tau} \underline{Z}_s + \omega_0^2 \underline{Z}_s,$$

soit avec $\underline{Z}_s = z_0$,

$$\underline{Y} = \frac{\frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} z_0.$$

3. Il s'agit de factoriser l'expression précédente par ω_0^2 en haut et en bas, et de poser $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\alpha = \frac{1}{\omega_0 \tau}$, pour obtenir l'expression demandée.

4. Les forces qui s'exercent sur m sont :

- son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$;

- le rappel élastique $\vec{F}_{el} = +k(l - l_0)\vec{u}_z = k(z - z_s - l_0)\vec{u}_z$;
- la réaction du sol \vec{R} .

a. Appliqué à ce système, le PFD donne :

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_s &= -mg + k(z - z_s - l_0) + R \\ \frac{m}{M} &= -\frac{m}{M}g + \frac{k}{M}(y + l_1 - z_s - l_0) + \frac{R}{M} = -\frac{m}{M}g + \frac{k}{M}\left(y + \left(l_0 - \frac{Mg}{k}\right) - z_s - l_0\right) + \frac{R}{M} \\ &= -\left(1 + \frac{m}{M}\right)g + \frac{k}{M}(y - z_s) + \frac{R}{M} \\ \beta\ddot{z}_s &= -(1 + \beta)g + \omega_0^2(y - z_s) + \frac{R}{M}. \end{aligned}$$

b. À une réorganisation des termes près l'équation précédente est bien celle demandée par l'énoncé.

c. En RSF, z_s et y sont tous les deux sinusoidaux de pulsation ω (le système est linéaire) de sorte que, par l'équation précédente, $R/M - (1 + \beta)g$ aussi. On peut ainsi écrire

$$\frac{R}{M} - (1 + \beta)g = 1 \cos(\omega t + \Phi) \Rightarrow \frac{R}{M} = (1 + \beta)g + 1 \cos(\omega t + \Phi).$$

En notation complexe, l'équation différentielle devient

$$\begin{aligned} \underline{A} &= (j\omega)^2\beta z_0 + \omega_0^2 z_0 - \omega_0^2 \underline{Y} \\ &= (jx\omega_0)^2\beta z_0 + \omega_0^2 z_0 - \omega_0^2 \frac{jx\alpha + 1}{1 - x^2 + jx\alpha} z_0 = \omega_0^2 \left(-x^2\beta + 1 - \frac{jx\alpha + 1}{1 - x^2 + jx\alpha} \right) z_0 \\ &= \omega_0^2 \frac{(1 - x^2\beta)(1 - x^2 + jx\alpha) - (jx\alpha + 1)}{1 - x^2 + jx\alpha} z_0 \\ &= -\omega_0^2 \frac{x^2(1 + \beta - \beta x^2 + jx\beta\alpha)}{1 - x^2 + jx\alpha} z_0. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$A = |\underline{A}| = \omega_0^2 x^2 \frac{\sqrt{(1 + \beta - \beta x^2)^2 + x^2 \beta^2 \alpha^2}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2 \alpha^2}} z_0.$$

d. La masse ne décolle pas du sol tant que R est non nulle. Or

$$\frac{R}{M} = (1 + \beta)g + A \cos(\omega t + \Phi)$$

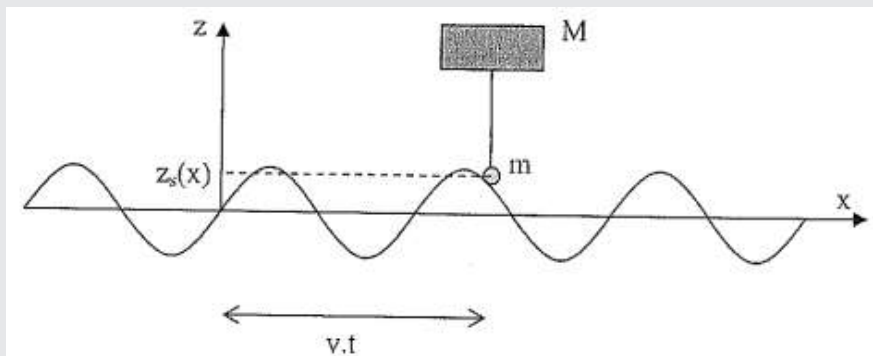
il faut donc que $A < (1 + \beta)g$. Après calcul, cette condition se traduit bien par celle donnée par l'énoncé.

e. Si $\omega \gg \omega_0$ on a $x \gg 1$ et on peut simplifier

$$h(x) \simeq x^2 \sqrt{\frac{\beta^2 x^4}{x^4}} \simeq \beta x^2$$

Il faudra donc choisir β le plus faible possible.

5.



a. La figure précédente montre que $\omega = 2\pi v/\lambda$.

b. L'étude précédente montre que si $\omega \gg \omega_0$ l'amplitude des oscillations de la masse M tend vers 0 il faut donc rouler vite :

$$v \gg \frac{\lambda \omega_0}{2\pi} = \lambda f_0 = 10,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Corrections du chapitre 7

Correction n°38 : Première vitesse cosmique

1. Dans le cas gravitationnel pour lequel $k = \mathcal{G}m_T$ (m étant la masse du système étudié et m_T la masse du corps attracteur), on déduit

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{R_T + h}}$$

Ainsi, tous les satellites sur une orbite circulaire donnée ont la même vitesse indépendamment de leur propre masse.

Ceci nous permet de définir la PREMIÈRE VITESSE COSMIQUE :

$$v_{c,1} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{R_T}} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. À nouveau en remplaçant k dans l'expression de T on a $T^2 = 4\pi^2(R_T + h)^3 / \mathcal{G}m_T$. On en déduit :

- La période de l'orbite rasante ($r = R_T$) vaut $T = 1\text{h}24\text{min}$.
- L'orbite géostationnaire est telle que $T = 86\,164 \text{ s}$. On trouve donc $h_{\text{géo}} \approx 36\,000 \text{ km}$.

Correction n°39 : Satellite géostationnaire

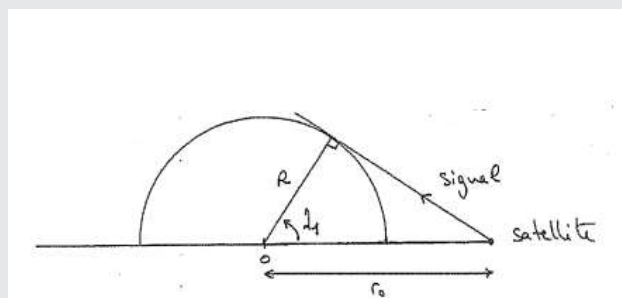
1. La première loi de Kepler implique que l'orbite soit une ellipse dont un des foyers est occupé par le centre attracteur (ici centre de la Terre). Comme le plan de l'orbite contient O c'est nécessairement le plan de l'équateur pour que la trace reste fixe.

La deuxième loi, loi des aires, implique $r^2\dot{\theta} = \text{cte}$ or $\dot{\theta} = \text{cte} = 2\pi/T_0$ pour que la trace soit fixe, donc $r = \text{cte}$ et la trajectoire est en fait circulaire.

La troisième loi implique que

$$\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T} \Rightarrow r_0 = \left(\frac{\mathcal{G}M_T T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42\,164 \text{ km} \Rightarrow h = 35\,794 \text{ km}$$

2. Le signal se propageant en ligne droite certains points lui sont inaccessibles :



Un peu de géométrie sur la figure précédente montre que

$$\cos(\lambda_1) = R/r_0 \Rightarrow \lambda_1 = \arccos(R/r_0) = 81^\circ 3'.$$

Correction n°40 : Seconde vitesse cosmique

La plus petite vitesse qui permet un état de diffusion est telle que $E_m = 0$. Elle doit donc vérifier

$$\frac{1}{2} m v_{c,2}^2 - \frac{k}{R_T} \geq 0 \quad \text{i.e.} \quad v_{c,2}^2 \geq \frac{2k}{R_T m} = \frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T} \quad \text{soit} \quad v_{c,2} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Correction n°41 : Masse approximative d'une galaxie

On se sert de la formule donnant la vitesse sur une orbite circulaire dans le cas gravitationnel : $v = \sqrt{\mathcal{G}m/a}$ et on déduit

$$m = \frac{v^2 a}{\mathcal{G}} = 2,8 \cdot 10^{41} \text{ kg}.$$

Correction n°42 : Mouvement quasi-circulaire

1. Le point M subit trois forces : le poids $m\vec{g}$ et la réaction du support \vec{R} qui se compensent sur la direction verticale, et la tension du fil \vec{T} . Le théorème du moment cinétique donne

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{T} \text{ est colinéaire à } \vec{OM}.$$

Le moment cinétique est donc constant et vaut $\vec{L}_O = mr v \vec{u}_z$ pour le mouvement circulaire. Entre l'instant t et le moment initial on a donc $r_0 v_0 = r v$ soit $v = r_0/r v_0$. La vitesse augmente au fur et à mesure qu'on se rapproche du centre attracteur, ce qui est commun dans ce genre de situation.

2. On a $W(\vec{R} + m\vec{g} + \vec{T}) = \Delta E_c$ or $W(\vec{R} + m\vec{g}) = 0$ donc

$$W_{op} = W(\vec{T}) = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) > 0,$$

logique, c'est l'opérateur (le fait que quelqu'un tire sur la corde) qui est à l'origine du mouvement ici, il fournit de l'énergie au système (il n'y a pas de frottements!).

Correction n°43 : Interaction ion-molécule

1. Tout cela découle simplement du caractère central de la force, peu importe la forme exacte de son expression (en particulier pas besoin qu'elle soit newtonienne ni même conservative) : voir le cours. On trouve $C = \left| r^2 \dot{\theta} \right| = a v_0$ ici.

2. Identifier l'expression de l'énergie potentielle E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$ suffit à montrer que cette force est conservative. L'expression qui convient est

$$E_p(r) = -\frac{K}{2r^2} + \text{cste},$$

où la constante est souvent prise nulle (référence d'énergie potentielle à l'infini).

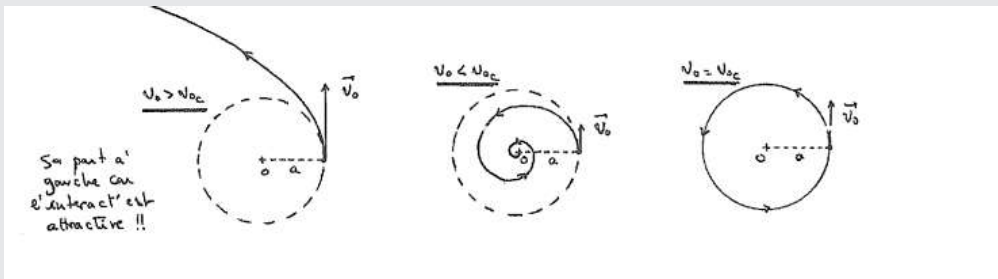
3. En explicitant $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$ et en remplaçant $\dot{\theta}$ par C/r^2 il vient

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{2r^2}}_{U_{\text{eff}}(r)} = E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{K}{2a^2}.$$

E_0 est l'énergie mécanique totale du système (constante puisque la force est conservative) et $U_{\text{eff}}(r)$ est l'énergie potentielle effective.

4. On a $U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}(ma^2v_0^2 - K)\frac{1}{r^2}$ et $U_{\text{eff}}(a) = E_0$.

- Si $v_0 > v_{0,c} = \sqrt{K/ma^2}$ l'énergie potentielle effective est strictement décroissante de $+\infty$ vers 0 de sorte qu'on est dans un état de diffusion. Notamment, $r \in [a, +\infty[$.
- Si $v_0 = v_{0,c}$, l'énergie potentielle effective est nulle pour tout r et on reste en $r = a$: la trajectoire est circulaire.
- Si $v_0 < v_{0,c}$, l'énergie potentielle effective est strictement croissante de $-\infty$ vers 0 et on est dans un état lié qui tend vers 0 : une spirale.



Correction n°44 : Transfert d'orbite de Hohmann

1. Notons d'abord qu'un tel mouvement circulaire et nécessairement uniforme. Le PFD s'écrit alors

$$-m\frac{v^2}{r}\vec{u} = \vec{F} = -\frac{\mu m}{r^2}\vec{u} \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}.$$

- Avec $R_1 = R_T + h_1 = 6580$ km et $\mu = \mathcal{G}M = 39,9.10^{13}$ USI il vient $v_1 = 7,79$ km \cdot s $^{-1}$.
- L'orbite géostationnaire correspond à $T_2 = 2\pi R_2/v_2 = T_0 = 86\,160$ s. On tire, avec l'expression précédemment démontrée, $2\pi\mu/v_2^3 = T_0$ d'où $v_2 = 3,08$ km \cdot s $^{-1}$ (et $R_2 = 42\,200$ km).

2. En P et A la vitesse sur l'ellipse est tangente à la vitesse sur le cercle. Il n'y a donc pas besoin d'en changer la direction.

- En P il faut que le satellite s'éloigne de la Terre, il faut donc augmenter v .
- En A il faut maintenir r constant alors qu'il aurait tendance à diminuer si on restait sur l'ellipse. Il faut à nouveau augmenter v .

3. On va raisonner sur l'énergie.

- En P on est sur une orbite elliptique donc l'énergie mécanique est $E = -\mu m/2a$ mais vaut aussi, en P , la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique i.e. $E = -\frac{\mu m}{R_1} + \frac{1}{2}mv_1'^2$ d'où, avec $a = (R_1 + R_2)/2$,

$$v_1' = \left(\frac{2\mu}{R_1 + R_2} \frac{R_2}{R_1} \right)^{1/2} = 10,24 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Sur la même orbite, mais cette fois en R_2 , il vient

$$v'_2 = \left(\frac{2\mu}{R_1 + R_2} \frac{R_1}{R_2} \right)^{1/2} = 3,08 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4. On fait les différences numériques à partir des valeurs précédentes :

$$\Delta v = v'_1 - v_1 = 2,45 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta v' = v_2 - v'_2 = 1,48 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

5. La période sur l'orbite elliptique, par la troisième loi de Kepler, est $T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\mu^{1/2}}$. La durée du transfert est la moitié de cette période, soit

$$\Delta t = 18\,950 \text{ s} = 5 \text{ h}15 \text{ min}50 \text{ s}.$$

Corrections du chapitre 8

Correction n°45 : Trajectoire d'une balle dans un train qui ralentit

Le référentiel de la Terre étant pris pour référence galiléenne, le référentiel du train, accéléré, n'est pas à son tour galiléen. Dans ce référentiel la balle est donc soumise à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ (l'axe Oz est ascendant) et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = ma\vec{u}_x$.

L'application du principe fondamental de la dynamique à la balle dans le référentiel du train donne donc

$$m(\ddot{z}\vec{u}_z + \ddot{x}\vec{u}_x) = \vec{P} + \vec{F}_{ie} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} = a, \quad \ddot{z} = -g.$$

La balle étant, à $t = 0$ en $(x = 0, z = h)$ sans vitesse initiale ces équations s'intègrent :

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}at^2, \\z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + h.\end{aligned}$$

L'équation de la trajectoire d'obtient en exprimant $t^2 = 2x/a$ d'où

$$z(x) = -\frac{g}{a}x + h.$$

C'est donc une droite de pente $-g/a$!

Correction n°46 : Pendule uniformément accéléré

On se place dans le référentiel du train, ou du point d'attache du pendule, qui est en translation accélérée par rapport au référentiel de la Terre. Il n'est donc pas galiléen. On doit considérer les forces suivantes :

- Le poids, conservatif et dont l'énergie potentielle s'écrit $E_{p,pes} = mgz = -mgl \cos \theta$.
- La tension du fil \vec{T} , qui ne travaille pas.
- La force d'inertie d'entraînement qui, dans ce cas, est conservative puisque $\vec{F}_{ie} = -ma\vec{u}_x$ édrive de l'énergie potentielle $E_{p,ie} = max = -mal \sin \theta$.
- La force d'inertie de Coriolis, qui ne travaille pas.

Ainsi l'énergie potentielle du système est $E_p = -mgl \cos \theta - mal \sin \theta$. On veut en trouver les extrema. On dérive, ou on représente graphiquement au choix. Ici,

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgl \left(\sin \theta - \frac{a}{g} \cos \theta \right) = 0 \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{a}{g}.$$

On vérifie que l'angle est d'autant plus grand que le train accélère beaucoup, et nul si celui-ci n'accélère pas ce qui au conforme au résultat en référentiel galiléen. D'ailleurs, sans surprise, le résultat ne dépend pas de la vitesse du train, seulement de son accélération! En effet, si l'accélération, quelle que soit la vitesse, le

référentiel du train sera galiléen à son tour. On résume « Aucune expérience ne peut déceler le mouvement rectiligne uniforme d'un référentiel par rapport à un autre. »

Correction n°47 : Équilibre d'un pendule conique

À nouveau on mène l'étude énergétique dans le référentiel du point M cette fois. Par définition, dans ce référentiel, il est immobile de sorte que la force de Coriolis ne travaille pas.

$$E_{p, pes} = mgz = -mgl \cos \alpha \quad \text{et} \quad E_{p, ie} = -\frac{1}{2} m \omega^2 HM^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 l^2 \sin^2 \alpha.$$

On trouve la position d'équilibre en annulant la dérivée de $E_p = E_{p, pes} + E_{p, ie}$:

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = mgl \sin \alpha \left(1 - \frac{\omega^2 l^2}{g} \cos \alpha \right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \arccos \frac{g}{l^2 \omega^2}.$$

La première solution, triviale, existe toujours. On pourrait montrer en discriminant max/min qu'elle est instable dès que $\omega \neq 0$. L'autre solution quant à elle n'existe que si $\omega > \sqrt{g/l}$ ce qui est cohérent avec l'intuition !

Correction n°48 : Limite de Roche

1. L'application du PFD à la planète dans le référentiel héliocentrique (galiléen) donne :

$$M_P \vec{a}(P/R_H) = \vec{F}_{S \rightarrow P} = -\mathcal{G} \frac{M_S M_P}{R^2} \vec{e}_r \quad \text{où} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{SP}}{SP}.$$

On a donc $\vec{a}(P/R_H) = -\mathcal{G} \frac{M_S}{R^2} \vec{e}_r$.

2. Le *référentiel planéto-centrique* est le référentiel en translation dans le référentiel héliocentrique (ses axes restent alignés à ceux du référentiel de référence) dans lequel le point P est fixe. Il est donc, dans R_H , en translation à la vitesse $\vec{v}(P/R_H)$.

La question précédente montre que $\vec{a}(P/R_H) \neq \vec{0}$ de sorte que ce référentiel n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à R_H et n'est donc pas galiléen a priori.

3. Les forces et forces d'inertie qui s'appliquent à M sont :

- la réaction du sol $\vec{R} = R \vec{u}$;
- l'attraction gravitationnelle de la planète $\vec{F}_P = \mathcal{G} \frac{m M_P}{r^2} \vec{u}$;
- l'attraction gravitationnelle solaire $\vec{F}_S = -\mathcal{G} \frac{m M_S}{(R-r)^2} \vec{u}$;
- la force d'inertie d'entraînement $v v * F_{ie} = -m \vec{a}_e = -m \vec{a}(P/R_H) = \mathcal{G} \frac{m M_S}{R^2} \vec{u}$.
- la force de Coriolis, qui est nulle puisque le référentiel est translation.

Le système étant à l'équilibre dans le référentiel planéto-centrique,

$$\vec{R} + \vec{F}_P + \vec{F}_S + \vec{F}_{ie} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{R} = -\mathcal{G} m \left(\frac{M_P}{r^2} + \frac{M_S}{R^2} - \frac{M_S}{(R-r)^2} \right) \vec{u}.$$

4. Le système décolle dès que $\vec{R} = \vec{0}$.

5. On effectue le développement limité qui est suggéré par l'énoncé :

$$\frac{1}{(R-r)^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{-2} = \frac{1}{R^2} \left(1 + 2 \frac{r}{R} \right).$$

Ainsi,

$$\frac{M_P}{r^2} + \frac{M_S}{R_{\text{lim}}^2} - \frac{M_S}{(R_{\text{lim}} - r)^2} = \frac{M_P}{r^2} + \frac{M_S}{R_{\text{lim}}^2} - \frac{M_S}{R_{\text{lim}}^2} \left(1 + 2\frac{r}{R_{\text{lim}}}\right) = \frac{M_P}{r^2} - 2\frac{r}{R_{\text{lim}}} \frac{M_S}{R_{\text{lim}}^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\left(2\frac{M_S}{M_P}\right)^{1/3} r}.$$

En terme de masse volumique, et en prenant pour r la taille du satellite R_S , il vient :

$$R_{\text{lim}} = \left(2\frac{\rho_S}{\rho_P}\right)^{1/3} R_S = 5,6 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Mercure, qui est la planète la plus proche du Soleil, est bien au-delà de la limite de Roche.

Correction n°49 : Ordre de grandeur des composantes du poids

Le champ de gravitation terrestre à l'équateur vaut :

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \frac{M_T}{R^2} \approx 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

La contribution d'inertie est bien plus faible tout en donnant lieu à une correction décelable, puisque

$$R\Omega_T^2 \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Correction n°50 : Expérience de Reich

1. La bille dans le référentiel terrestre est soumise à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et à la force de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m(\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z) \wedge \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$. Tous calculs faits on obtient en projection :

$$m\ddot{x} = -2m\omega(\cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{y})$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega \sin \lambda \dot{x}$$

$$m\ddot{z} = 2m\omega \cos \lambda \dot{x} - mg$$

2. La norme de la force de Coriolis est majorée par $2m\omega v$. On a donc à la limite demandée

$$\frac{2m\omega v}{mg} = 1 \cdot 10^{-3} \Rightarrow v = \frac{1 \cdot 10^{-3} g}{2\omega} \approx 68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 242 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

3.

a. En première approximation (c'est à dire en négligeant \vec{F}_{ic}) on a un mouvement de chute libre donc la durée est $\tau' = \sqrt{h/g}$ de sorte que la vitesse typique de la chute est $v' = \tau' g = \sqrt{gh}$. On en déduit l'ordre de grandeur de la force de Coriolis, qui s'exerce essentiellement selon \vec{u}_x : $F'_{ic} \approx 2m\omega \cos \lambda v'$. Le PFD permet d'obtenir la traduction de cette force en accélération. En ordre de grandeur toujours, $a'_x = 2\omega \cos \lambda \sqrt{gh}$.

Le déplacement selon \vec{u}_x est alors

$$x' = a'_x \tau'^2 = 2\omega \cos \lambda g \left(\frac{h}{g}\right)^{3/2}.$$

L'application numérique donne 6 cm. On s'attend donc à un effet mesurable.

b. Il s'agit de résoudre une chute libre. On obtient immédiatement :

$$\dot{x}_0(t) = \dot{y}_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{z}_0(t) = -gt.$$

c. On en déduit l'expression approchée de $\vec{F}_{ic} = 2m\omega \cos \lambda g t \vec{u}_x$. La résolution est alors possible et donne

$$x_1(t) = \frac{1}{3} \omega \cos \lambda g t^3, \quad y_A(t) = 0 \quad \text{et} \quad z_1(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

d. D'après l'expression de $z_1(t)$ le temps de chute est $\tau = \sqrt{2H/g}$. En injectant dans x_1 il vient

$$x_1(\tau) = \frac{1}{3} \omega \cos \lambda g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}.$$

L'application numérique donne $x_1(\tau) = 27,6$ mm, ce qui est sans doute, aux incertitude près, cohérent avec la valeur mesurée.

4. On a mené tous les calculs algébriquement, sans jamais supposé $\lambda > 0$ qui signifierai être dans l'hémisphère nord. Le résultat obtenu est donc valable en tout point de la Terre et, comme λ n'intervient que par son cosinus, le résultat est le même qu'on soit dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud!

Correction n°51 : Pendule de Foucault

1. Dans le référentiel terrestre, la masse est soumise à son poids \vec{P} , à la tension du fil \vec{T} et à la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$. Si on lâche la masse sans vitesse initiale les deux seules forces non nulles sont \vec{P} et \vec{T} et sont dans le plan vertical contenant le fil. Le mouvement s'initie donc dans ce plan. Avec le choix fait pour les axes, le vecteur rotation $\vec{\omega}_T$ de la Terre par rapport au référentiel géocentrique est porté par \vec{u}_y et le vecteur vitesse, par hypothèse du mouvement plan, est selon \vec{u}_x et \vec{u}_y . Dès lors, la force de Coriolis n'a de composante que selon \vec{u}_z et les trois forces sont dans le plan vertical. Le pendule continue à osciller dans le plan initial du mouvement.

2. Dans le référentiel géocentrique galiléen le pendule oscillera selon un plan fixe. Dès lors un observateur terrestre verra le plan d'oscillation du pendule tourner autour de l'axe des pôles dans le sens est-ouest, en effectuant une rotation complète en un jour sidéral T_T .

3.

a. La tension du fil est dirigée par le vecteur unitaire de la droite (O_1A) et dirigé de A vers O_1 . Le vecteur $\overrightarrow{AO_1}$ étant de norme L le vecteur unitaire cherché s'exprime $-\overrightarrow{O_1A}/L$. Dès lors, en notant T la norme de la tension on a bien l'expression demandée.

b. En effectuant le produit vectoriel de la force de Coriolis, en utilisant la forme de \vec{T} précédente et en projetant sur les trois axes il vient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -T\frac{x}{L} + 2m\omega_T \sin \lambda \dot{y} - 2m\omega_T \cos \lambda \dot{z} \\ m\ddot{y} &= -T\frac{y}{L} - 2m\omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ m\ddot{z} &= -mg - T\frac{z-L}{L} + 2m\omega_T \cos \lambda \dot{x} \end{cases}$$

c. Avec les hypothèses de l'énoncé il vient, selon (Oz) : $0 = -mg + T$ soit $T = mg$. En reportant dans les deux autres projections il vient :

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{L} + 2\omega_T \sin \lambda \dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = -g\frac{y}{L} - 2\omega_T \sin \lambda \dot{x},$$

qui sont bien les deux équations demandées.

d. En formant $(1) + i \times (2)$ il vient l'équation différentielle sur u suivante :

$$\ddot{u} + 2\omega_T \sin(\lambda) i \dot{u} + \omega_0^2 u = 0.$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 2\omega_T \sin(\lambda) i r + \omega_0^2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4\omega_T \sin^2(\lambda) - 4\omega_0^2$. Or $\omega_0 \approx 0,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_T \sin \lambda < 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Au premier ordre, on peut négliger ce deuxième terme et

prendre $\Delta = -4\omega_0^2$ et les racines de l'équation caractéristique, complexes, sont $r_{\pm} = (-2\omega_T \sin \lambda \pm \omega_0)i$. La forme générale de la solution est ainsi :

$$u(t) = A \exp(i(-2\omega_T \sin \lambda + \omega_0)t) + B \exp(i(-2\omega_T \sin \lambda - \omega_0)t).$$

Les conditions initiales $u(0) = x_0$ et $\dot{u}(0) = 0$ conduisent, compte tenu toujours de $\omega_T \ll \omega_0$, à $A = B = x_0/2$, d'où $u(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \exp(-i\omega_T \sin \lambda t)$ dont on tire les parties réelle et imaginaire :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_T \sin(\lambda)t) \quad \text{et} \quad y(t) = -x_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_T \sin(\lambda)t).$$

4. Dans le nouveau système d'axes, la variable complexe $u' = x' + iy'$ repérant la masse s'obtient en multipliant u par $\exp(i\omega_T \sin \lambda)$, soit $u'(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ d'où $x'(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ et $y'(t) = 0$. Dans ce repère tournant la masse décrit des oscillations à ω_0 , tout ce qu'il y a de plus classique. On en conclut que le pendule de Foucault oscille comme un pendule simple mais dans un plan vertical tournant à la vitesse angulaire $\omega_T \sin \lambda$.

- À l'équateur, où $\lambda = 0^\circ$ le plan ne tourne pas du point de vue de l'observateur terrestre.
- Au pôle, où $\lambda = 90^\circ$ le plan tourne à vitesse angulaire ω_T .

Correction n°52 : Étude d'un roulement dans le référentiel barycentrique

Dans le référentiel barycentrique (de repère d'espace lié $(Gxyz)$), le mouvement de \mathcal{S} est une rotation de vitesse angulaire ω (cf. figure). L'énergie cinétique barycentrique est donc $J\omega^2/2$.

Le second théorème de König permet d'exprimer l'énergie cinétique totale du disque dans \mathcal{R} :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J \omega^2.$$

En supposant qu'il y a roulement sans glissement, on a de plus $v_G = -R\omega$, ce qui permet d'écrire pour un disque homogène

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{4} m v_G^2 = \frac{3}{4} m v_G^2.$$

Correction n°53 : Dynamique d'un yoyo

Le théorème de la résultante cinétique, appliqué dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, s'écrit projeté suivant \vec{u}_z :

$$m\ddot{z} = mg - T,$$

où on a noté z la coordonnée du centre de masse G . On peut déterminer la tension du fil en appliquant le théorème du moment cinétique barycentrique :

$$J\dot{\omega} = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T}) \cdot \vec{u}_x = RT.$$

Comme enfin le fil se déroule sans glisser, on peut relier la rotation à la translation via $\dot{z} = R\omega$. Finalement, on a pu déterminer l'accélération du centre de masse :

$$\ddot{z} = g \left(1 + \frac{J}{mR^2} \right)^{-1}.$$

On peut aussi utiliser une approche énergétique avec le premier théorème de König.

Correction n°54 : Point sur un plateau oscillant

Le référentiel du plateau est un référentiel en translation verticale non-uniforme, il est donc non-galiléen. Dans ce référentiel on souhaite que le point matériel M reste au repos. Les forces qui s'exercent ici sont le poids et la réaction normale. Il faut par ailleurs prendre en compte la pseudo-force d'inertie d'entraînement. On a donc :

$$\vec{N} + m\vec{g} - m\frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z = \vec{0}.$$

La projection verticale donne :

$$N = mg - m\alpha\omega^2 \cos \omega t,$$

et le point reste sur le plateau tant que $N \geq 0$. On majore le cosinus par 1 pour trouver la condition suffisante $N \geq 0 \Rightarrow g \geq \alpha\omega^2$ de sorte que le point reste sur le plateau tant que $\omega \leq \sqrt{g/\alpha}$.

Correction n°55 : Bille dans un tube en rotation, version RNG

On se place dans le référentiel du tube en rotation et on repère par x la distance par rapport à l'origine. Le PFD projeté sur l'axe du tube, fixe dans ce référentiel, donne

$$m\ddot{x} = \vec{F}_{ie} \cdot \vec{u}_x = -m\vec{a}_{ie} \cdot \vec{u}_x = m\omega^2 x, \quad \text{puisque} \quad \vec{a}_{ie} = -\omega^2 \overrightarrow{HM},$$

et on retrouve bien l'équation $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ qui redonne la solution en cosh.

En principe on aurait dû prendre en compte la force de Coriolis, mais $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ est selon \vec{e}_y , donc ne se voit pas sur la projection du PFD selon \vec{u}_x . Par ailleurs, elle est compensée par la réaction normale.

Dans le cas des petites oscillations en présence d'un ressort. Il faut ajouter la force de rappel du ressort, qui donnera les mêmes résultats que précédemment.

Correction n°56 : Mouvement oscillant dans un tube en rotation

Dans le référentiel du tube en rotation, selon l'axe x_1 , on a :

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - l_0) - mg \cos \alpha + m\omega^2 x_1 \sin^2 \alpha,$$

où le $\sin^2 \alpha$ provient de deux termes : la distance du point M à l'axe qui intervient dans la force d'inertie d'entraînement et qui vaut $x_1 \sin \alpha$ et la projection sur l'axe Ox_1 qui multiplie à nouveau par $\sin \alpha$. On obtient donc :

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) x_1 = \frac{k}{m} l_0 - g \cos \alpha.$$

On pourrait définir une position d'équilibre donnée par

$$x_{\text{eq}} = \frac{\frac{k l_0}{m} - g \cos \alpha}{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha},$$

mais on sait que ça ne changera rien à l'équation homogène, donc on peut s'en abstenir.

Il y a des oscillations dès lors que le coefficient devant x_1 est positif, c'est-à-dire si

$$\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Il faut donc, à masse fixée, un ressort suffisamment raide pour empêcher la fuite du point vers l'extérieur, et une force d'entraînement pas trop forte ce qui se traduit par une vitesse de rotation ω de module raisonnable et un angle faible pour ne pas tendre vers l'horizontale. On a alors une période d'oscillation

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Correction n°57 : Énergie d'une perle en rotation sur un anneau

1. Le point M est soumis à son poids, la réaction normale et la pseudo-force d'inertie.

2. La pseudo-force d'inertie vaut $m\omega^2 x \vec{u}_x$, qu'on peut écrire comme le gradient de $E_{p,i} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. On a donc une énergie potentielle totale

$$E_p = mgR(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = mgR(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta.$$

3. Toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle donc l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + E_p$ se conserve. On a donc

$$mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta + m\omega^2 R^2 \sin\theta \cos\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta - \omega^2 \sin\theta \cos\theta = 0.$$

4. Il y a équilibre lorsque $\ddot{\theta} = 0$ c'est-à-dire :

$$\sin\theta\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\theta\right) = 0.$$

Il y a donc toujours équilibre en $\theta = 0$. Par ailleurs, si $\omega > \frac{g}{R}$, on a équilibre pour $\cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$.

5. L'énergie potentielle vaut

$$E_p(\theta) = mgR(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta.$$

En dérivant deux fois par rapport à θ , on obtient

$$E_p''(\theta) = mgR \cos\theta - m\omega^2 R^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

Pour $\theta = 0$, on a $E_p''(0) = mR(g - \omega^2 R)$. Il s'agit donc d'une position stable ($E_p''(0) > 0$) si $\omega > \sqrt{g/R}$, instable sinon.

Pour $\cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}$, on a (on note que $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$:

$$E_p''(\theta) = mgR \frac{g}{R\omega^2} - m\omega^2 R^2 \left(2 \frac{g^2}{R^2 \omega^4} - 1\right) = m\omega^2 R^2 - \frac{mg^2}{\omega^2}$$

cette dernière fonction est strictement positive pour $\omega > \sqrt{g/R}$, donc dès lors que les positions d'équilibre $\cos\theta = g/R\omega^2$ existent.