

Mécanique des fluides

pour la préparation à l'agrégation de chimie

Jules FILLETTE
jules.fillette@phys.ens.fr

20 janvier 2022

Chapitre introductif

Intérêt de l'hydrodynamique

Nous allons voir que les applications de l'hydrodynamique sont très nombreuses, et cela explique en partie le fait que c'est un champ assez ancien de la physique. Ainsi, ça a été la voie d'introduction de nombreux concepts de la physique : ondes, opérateurs de dérivation de champs (divergence, rotationnel), couche limite, turbulence.

De plus, du fait du caractère non linéaire de l'équation maîtresse, dite « de Navier-Stokes », la dynamique des fluides les plus simples comme l'eau ou l'air, peut être très complexe. L'hydrodynamique joue ainsi un rôle clé en physique non-linéaire. D'autre part, l'hydrodynamique constitue toujours un défi pour les mathématiciens, qui restent à ce jour incapables de résoudre les équations du mouvement des fluides dans le cas général.

D'un point de vue pédagogique, les phénomènes hydrodynamiques sont faciles à visualiser, et l'hydrodynamique permet d'illustrer de nombreux concepts de la physique. Il faut néanmoins être conscient que des concepts physiques difficiles et des techniques mathématiques ardues sont souvent nécessaires pour expliquer des l'écoulement de fluides, y compris ceux qui sont familiers aux élèves.

Quelques hydrodynamiciens de renom

- Archimède, -287 à -212, grec : relie la force sur un objet immergé au poids du liquide déplacé.
- B. Pascal, 1623-1662, français : introduit le concept de pression.
- D. Bernoulli, 1700-1782, suisse : énonce le théorème reliant la pression et la vitesse pour les fluides parfaits.
- L. Euler, 1707-1783, suisse : pose les bases des équations sur les fluides parfaits.
- T. Young, 1773-1820, britannique : étudie la forme des gouttes sur un substrat, les interférences lumineuses et la pierre de Rosette.
- H. Navier, 1785-1836, français : établit les équations du mouvement des fluides.
- J.-L.-M. Poiseuille, 1797-1869, français : étudie l'écoulement dans des conduites, en lien avec les écoulements sanguins.
- H. Darcy, 1803-1858, français : étudie et théorise les écoulements en milieux poreux.
- G. Stokes, 1819-1903, britannique : étudie les fluides visqueux et complète à ce titre les travaux de Stokes.
- O. Reynolds, 1842-1912, britannique : étudie la transition laminaire-turbulent dans des écoulements dans des tubes.
- M. Couette, 1858-1943, français : détermine expérimentalement la viscosité de multiple fluides.
- L. Prandtl, 1875-1953, allemand : travaille à la théorie de la couche limite.
- G. Taylor, 1886-1975, britannique : fait grandement avancer les champs d'étude sur les instabilités, les écoulements atmosphériques, et les ondes de chocs.

La mécanique des fluides à l'agrégation de chimie

La mécanique des fluides en composition de physique

2017 Une question ouverte sur une chute de bille dans un liquide visqueux.

2013 Quasiment que de l'hydro : tension superficielle, contact entre deux phases liquides, loi de Laplace sur la pression, mouillage et angle de contact, instabilité de Rayleigh-Plateau (et un peu de thermo et d'interférences).

2011 Écoulement dans l'atmosphère, couplage avec la thermodynamique.

La mécanique des fluides dans les thèmes de la session 2022

- Phénomènes acoustiques ; Effet Doppler
- Aspects énergétiques de phénomènes physiques
- L'énergie, conversion et transferts
- Mouvements, interactions et notion de champ
- Modélisation de l'écoulement d'un fluide
- Conservation de l'énergie
- Mouillage
- Viscosité
- Écoulements de fluides

Exemples d'écoulements

Les photos suivantes ont pour but d'illustrer la diversité des échelles d'écoulement, tant d'un point de vue spatial que temporel. Elles illustrent aussi des écoulements plus ou moins organisés, plus ou moins visqueux, etc.

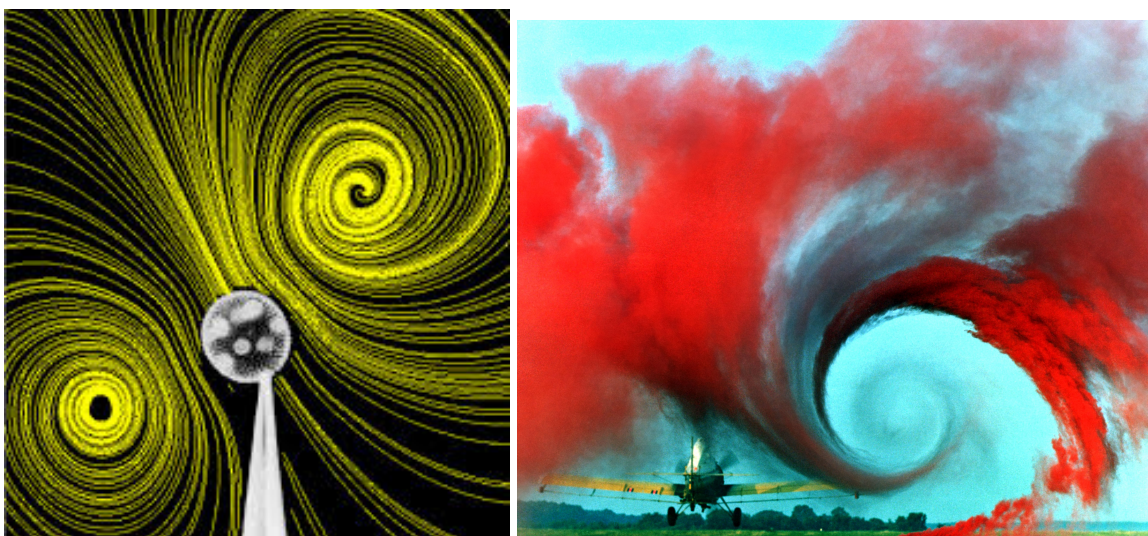


FIGURE 1 – (*Gauche*) Écoulement autour d'une algue Volvox <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gold/movies.html>. (voir aussi [Matiere], atouru de la page 82. (*Droite*) Tourbillon de bout d'aile mis en évidence par de la fumée rouge (Wikipédia).



FIGURE 2 – (*Gauche*) Sillage occasionné par un bateau à faible vitesse (Wikipédia). (*Droite*) Coulée de lave à Hawaï (Wikipédia).



FIGURE 3 - (*Gauche*) Mer de glace (Wikipédia). (*Droite*) Stalactites de bitume <http://www.le-comptoir-geologique.com/mine-du-colombier-des-rois-de-dallet-63-france.html>.

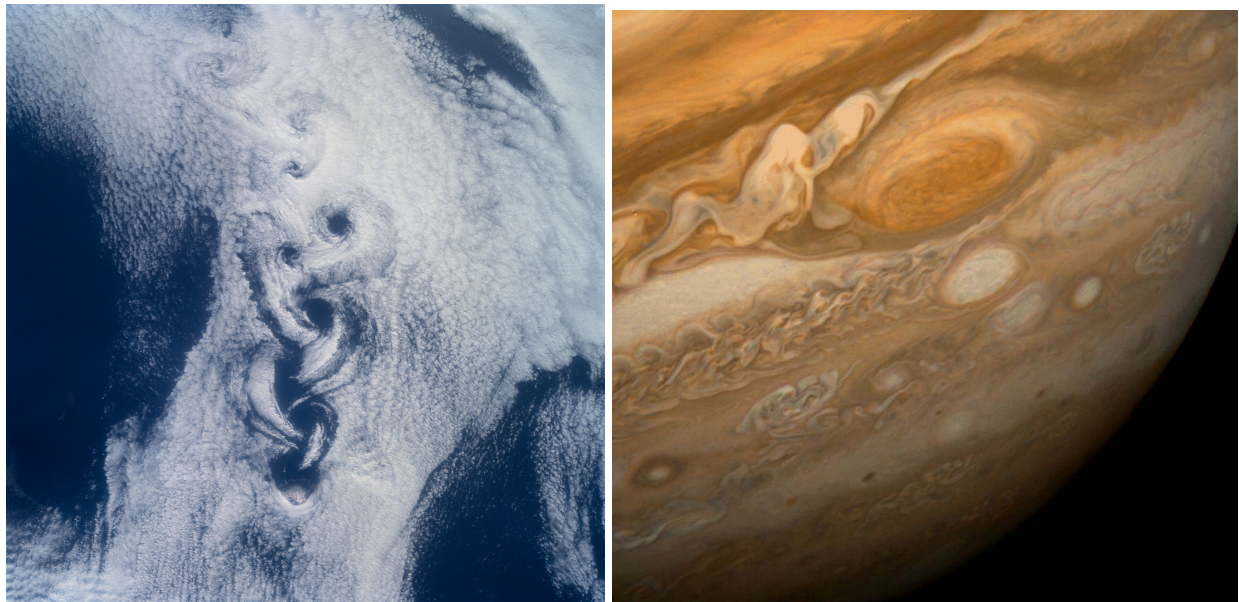


FIGURE 4 - (*Gauche*) Allée de tourbillons de Von Kármán au large de l'île Rishiri au Japon (Wikipédia). (*Droite*) La grande tache rouge de Jupiter vue par Voyager 1 en 1979 (Wikipédia).

Table des matières

1	Cinématique des écoulements	11
1.1	Notion de fluide	11
1.2	Approximation des milieux continus	11
1.2.1	Notion d'échelle mésoscopique	11
1.2.2	Notion de <i>particule fluide</i>	12
1.3	Description lagrangienne et eulérienne des vitesses	13
1.3.1	Description lagrangienne des vitesses	13
1.3.2	Description eulérienne des vitesses	13
1.4	Mesure et caractérisation des écoulements	14
1.4.1	Stationnarité	14
1.4.2	Rotationnel	15
1.4.3	Techniques expérimentales de mesure de vitesse	15
1.4.4	Trajectoires et lignes diverses	16
1.5	Dérivée particulaire	17
1.5.1	Idee générale	17
1.5.2	Formules de dérivation totale	17
1.5.3	Dérivée particulaire de la masse volumique - Écoulement incompressible	18
1.5.4	Dérivée particulaire du vecteur vitesse	18
1.6	Équation locale de conservation de la masse	19
1.6.1	Équation dans le cas 1D	19
1.6.2	Équation généralisée en dimension supérieure	19
1.6.3	Lien avec l'incompressibilité	20
1.7	Exercices supplémentaires	21
2	Statique des fluides	25
2.1	Forces surfaciques, forces volumiques	25
2.2	Forces de pression, résultante et équivalent volumique	25
2.2.1	Force de pression	25
2.2.2	Calcul de la résultante	25
2.2.3	Équivalent volumique	26
2.3	Équation fondamentale de la statique des fluides	27
2.4	Modèle de l'atmosphère isotherme et introduction au facteur de Boltzmann	28
2.4.1	Pression dans l'atmosphère isotherme	28
2.4.2	Facteur de Boltzmann	29
2.5	Principe d'Archimède	29
2.6	Exercices supplémentaires	30

3	Dynamique des fluides	33
3.1	Contraintes tangentielles et viscosité(s)	33
3.1.1	Contraintes tangentielles dans un écoulement de cisaillement simple	33
3.1.2	Équivalent volumique des forces de viscosité	34
3.1.3	Diffusion de quantité de mouvement et viscosité cinématique	35
3.1.4	Quelques ordres de grandeur	36
3.1.5	Généralisation aux fluides complexes	36
3.2	Équation de Navier-Stokes	37
3.2.1	Établissement de l'équation	37
3.2.2	Interprétation physique des différents termes	37
3.3	Conditions aux limites	38
3.3.1	Conditions aux limites cinématiques	38
3.3.2	Conditions aux limites dynamiques	39
3.4	Nombre de Reynolds	40
3.4.1	Par adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes	40
3.4.2	Par rapport de deux termes	41
3.4.3	Par rapport de deux temps caractéristiques	41
3.4.4	Ordre de grandeur	42
3.5	Vue d'ensemble de la suite du cours	42
4	Écoulements parallèles	45
4.1	Définition et intérêt des écoulements parallèles	45
4.2	Écoulements de Couette	45
4.2.1	Écoulement de Couette plan	45
4.2.2	Écoulement de Couette circulaire	46
4.2.3	Application à la mesure de viscosité	48
4.2.4	Écoulement de Couette en régime variable	48
4.3	Écoulements de Poiseuille	48
4.3.1	Écoulement de Poiseuille plan	48
4.3.2	Écoulement de Poiseuille cylindrique	48
4.4	Stabilité des écoulements parallèles	49
5	Écoulements de fluides très visqueux	55
5.1	Propriétés de l'équation de Stokes et de ses solutions	55
5.1.1	Linéarité	55
5.1.2	Écoulement autour d'une Sphère. Force de Stokes	56
5.1.3	Écoulement autour d'une Sphère. Coefficient de trainée	57
5.2	Écoulements derrière un obstacle et nombre de Reynolds	58
5.2.1	Écoulements derrière une sphère	58
5.2.2	Écoulements derrière un cylindre	59
5.3	Complément : Nage des microorganismes	61
6	Écoulement dans un milieu confiné. Milieux poreux.	63
6.1	Définition et description	63
6.1.1	Loi de Darcy	64
6.1.2	Modèle du milieu poreux composé de capillaires	65
6.2	Sédimentation en suspension	66
6.3	Exercices supplémentaires	68

7	Écoulements de fluides non visqueux ou dominés par l'inertie	69
7.1	Écoulement parfait	69
7.1.1	Définition et équation d'Euler	69
7.1.2	Théorèmes de Bernoulli	70
7.2	Applications	71
7.2.1	Effet Coanda	72
7.2.2	Aspiration d'une balle de ping-pong.	73
7.2.3	Vidange de Toricelli	73
7.2.4	Tube Pitot	73
7.2.5	Cavitation	74
7.2.6	Théorème de Kelvin et effet Magnus	74
7.3	Notion de couche limite	75
7.3.1	Couche limite laminaire	75
7.3.2	Couche limite laminaire et turbulente	76
7.4	Complément : modélisation des écoulements inertiels turbulents	76
8	Ondes acoustiques	79
8.1	Équation de propagation	79
8.1.1	Approximation acoustique	79
8.1.2	Équations	80
8.1.3	Linéarisation des équations	80
8.1.4	Équation de d'Alembert	81
8.1.5	Conditions d'écoulement incompressible	82
8.2	Aspect énergétique	82
8.3	Solutions de l'équation d'onde	83
8.3.1	Structure de l'onde plane	83
8.3.2	Aspect fréquentiel	83
8.3.3	Énergie transportée par l'onde plane	83
8.3.4	Ondes sphériques	84
8.4	Dioptrisme acoustique	85
8.4.1	Définition	85
8.4.2	Impédance acoustique	86
8.4.3	Coefficients de réflexion et de transmission	86
8.5	Effet Doppler	87
8.5.1	Aspect qualitatif	87
8.5.2	Cas 1D	87
8.5.3	Cas 3D	88
8.5.4	Échographie Doppler	88
8.6	Ondes acoustiques stationnaires	88
8.6.1	Conditions limites	89
8.6.2	Ondes stationnaires	89
8.6.3	Cas d'un tuyau simple	89
8.6.4	Cas d'un tuyau mixte	91
9	Tension superficielle	93
9.1	Approche énergétique	94
9.1.1	Définition thermodynamique	94
9.1.2	Origine microscopique	94
9.2	Force associée à la tension de surface	95
9.3	Loi de Laplace	96

9.3.1	Cas d'une sphère	96
9.4	Tensioactifs	97
9.5	Mouillage	97
9.5.1	Angle de contact	98
9.5.2	Relation de Young-Dupré	98
9.6	Méthodes de mesure de la tension de surface	99
9.7	Application à la formulation	99
9.7.1	Définitions et objectifs de la formulation	99
9.7.2	Comment obtenir un bon mouillage?	100
9.7.3	Comment obtenir un mauvais mouillage?	102

Chapitre 1

Cinématique des écoulements

L'objet de ce premier chapitre est d'étudier la description d'un fluide en mouvement. En effet, contrairement à la mécanique classique qui suppose souvent que le système est indéformable, la mécanique des fluides porte sur un système compliqué pour lequel chaque particule peut avoir une trajectoire différente.

1.1 Notion de fluide

Parmi les états usuels de la matière, on distingue classiquement les solides des fluides¹.

- Les solides ont une forme propre. Si on applique une force indépendante du temps à un solide élastique, celui-ci se déforme, et la déformation est à son tour indépendante du temps.
- À l'inverse, les fluides n'ont pas de forme propre. Si on applique une force indépendante du temps à un fluide, celui-ci se déforme indéfiniment : il s'ÉCOULE. La mécanique des fluides cherche à caractériser le champ de taux de déformation, c'est-à-dire le champ de vitesse, associé à des actions extérieures (forces, éventuellement moments).

Il faut noter que la différence de comportement entre un solide et un fluide dépend des caractéristiques des forces extérieures imposées, et notamment leur intensité et leur échelle de temps. Par exemple, un acier peut s'écouler lorsqu'il est soumis à des forces très importantes, comme dans un laminoir. Les glaciers et le manteau terrestre se comportent comme des solides aux temps courts, mais comme des fluides aux temps longs (dizaines voire centaines d'années).

L'étude de la réponse d'un système à une sollicitation extérieure est appelée RHÉOLOGIE. C'est un domaine de recherche très actif pour la caractérisation des FLUIDES COMPLEXES (polymères, suspensions, émulsions). Seuls les fluides simples, on dira FLUIDES NEWTONIENS seront étudiés dans ce cours.

1.2 Approximation des milieux continus

1.2.1 Notion d'échelle mésoscopique

Dans la matière, quel que soit son état, on peut usuellement définir trois échelles de longueur : l'échelle microscopique λ , l'échelle macroscopique L , et une échelle intermédiaire δ appelée ÉCHELLE MÉSCOPIQUE. Cette échelle existe à condition que les échelles microscopique et macroscopique soient suffisamment séparées, c'est-à-dire s'il existe une longueur δ telle que :

$$\lambda \ll \delta \ll L.$$

Si cette hypothèse est vérifiée, on dit que l'on peut faire l'APPROXIMATION DES MILIEUX CONTINUS.

1. Les fluides incluant à la fois les liquides et les gaz. La différence entre les deux peut être compliquée à préciser, cf. cours de Thermo.

Échelle microscopique λ Dans un fluide composé de petites molécules, l'échelle microscopique pertinente est le **LIBRE PARCOURS MOYEN**; c'est-à-dire la distance parcourue en moyenne par une particule du fluide entre deux chocs avec une autre.

Exercice n°1 : Libre parcours moyen dans les fluides

Déterminer le libre parcours moyen typique dans un liquide puis dans un gaz à partir de données usuellement tabulées.

Échelle macroscopique L Il s'agit de l'échelle L de variation des différents champs comme la masse volumique ρ , la vitesse \vec{v} , la pression p , etc. On peut la définir par exemple par

$$L = \left(\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{-1}.$$

En termes moins précis, mais plus parlants, c'est « la taille du système ».

Échelle mésoscopique et validité de l'approximation des milieux continus L'échelle mésoscopique est définie à condition que la dimension du problème, c'est-à-dire l'échelle de variation des grandeurs caractéristiques, soit largement supérieure à la taille λ du niveau particulaire.

- L'hypothèse $\delta \gg \lambda$ garantit que tout sous-volume mésoscopique de volume δ^3 contient suffisamment de particules pour *moyenner* les grandeurs locales (masse volumique, température, pression, etc.) et négliger leurs fluctuations autour de leur valeur moyenne.
- L'hypothèse $\delta \ll L$ garantit que cette longueur est accessible dans le système, sans quoi il contient si peu de particules qu'elles doivent être traitées séparément.

On peut alors définir en chaque point les différentes grandeurs comme la masse volumique $\rho(x, y, z, t)$, la vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$, la pression $p(x, y, z, t)$, comme des grandeurs moyennées sur un sous-volume mésoscopique centré sur (x, y, z) à l'instant t . Les grandeurs thermodynamiques comme la température et la pression sont bien définies car le nombre de molécules permet de faire des moyennes et que les distances sont suffisantes pour qu'il y ait assez de particules dans chaque sous-volume pour atteindre la limite thermodynamique.

Contre-exemples Pour terminer, deux exemples dans lesquels l'hypothèse des milieux continus n'est pas vérifier :

- Lors de l'entrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère elle passe d'un milieu de densité nulle à un milieu de densité très élevée. Il existe donc nécessairement une zone où la densité est telle qu'à l'échelle de la navette il n'y a que quelques particules autour d'elle.
- Elle n'est pas non plus vérifiée pour l'écoulement d'une suspension dans un canal de taille comparable à celle des particules en suspension, par exemple les écoulements sanguins dans une veine de taille comparable à celle des globules rouges ($\approx 7,5 \mu\text{m}$ de diamètre).

Dans ce régime moléculaire, dit *régime de Knudsen*, l'étude des écoulements se ramène à un problème de mécanique d'objets discrets que l'on peut décrire en termes de chocs entre objets et parois.

Dans toute la suite, on étudiera exclusivement des situations dans lesquelles l'approximation des milieux continus est vérifiée.

1.2.2 Notion de *particule fluide*

On appelle **PARTICULE FLUIDE** une masse de fluide définie par un volume de taille mésoscopique².

2. Certains parlent parfois de « particule de fluide » ce que je vous invite à éviter. La particule de fluide c'est la molécule d'eau (par exemple) tandis que la particule fluide est un volume mesoscopique de molécules.

Remarque

1. Par définition, la masse d'une particule de fluide est constante dans le temps. Par contre, son volume peut varier, si l'écoulement est COMPRESSIBLE.
2. La forme d'une particule de fluide peut varier au cours du temps, avec ou sans conservation de volume.
3. À cause de la diffusion moléculaire ce ne sont pas toujours les mêmes molécules qui constituent la particule fluide. Une particule fluide est donc en toute rigueur un système ouvert, même si son nombre de constituants est constant.

La particule fluide est donc le bon système pour étudier le mouvement du fluide. On va pouvoir mesurer sa masse et son volume, sa position et sa vitesse, sa température et sa pression, etc. *Comment suivre ces propriétés dans un milieu qui s'écoule ?*

1.3 Description lagrangienne et eulérienne des vitesses

Le suivi des propriétés d'un fluide ou d'une particule fluide peut se faire de deux manières différentes l'une et l'autre assez intuitives mais à ne pas mélanger.

1.3.1 Description lagrangienne des vitesses

Dans la DESCRIPTION LAGRANGIENNE du fluide, on suit les particules de fluide au cours de leur mouvement. Le champ de vitesse est fonction de la position initiale \vec{r}_0 de la particule et du temps t :

$$\vec{v}_{\text{lagrange}}(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r}_0, t)$$

La vitesse en représentation lagrangienne est la vitesse d'une particule fluide au cours du temps.

1.3.2 Description eulérienne des vitesses

Dans la DESCRIPTION EULÉRIENNE des vitesses, on donne la valeur de la vitesse en chaque point, la vitesse en un point étant la vitesse de la particule fluide qui s'y trouve à l'instant considéré. Elle est ainsi fonction de l'espace et du temps :

$$\vec{v}_{\text{euler}}(\vec{r}, t) = \vec{f}(\vec{r}, t).$$

Les vitesses eulérienne et lagrangienne en un point donné et un instant t coïncident.

Exercice n°2 : Suivi eulérien et lagrangien de la température d'un vacancier

Un touriste parisien prend la route de bonne heure vers Marseille et relève les températures au tableau de bord de la voiture toutes les 30 min. Quel suivi de température effectue-t-il ? À quel suivi celui-ci doit-il être opposé et quand ce second suivi est-il généralement rencontré ?

Remarque

On comprend bien, sur l'exercice précédent, que l'idéal est de connaître la température en tout point à tout instant puisqu'alors l'information est totale. Évidemment, dans le cas de la température comme de la

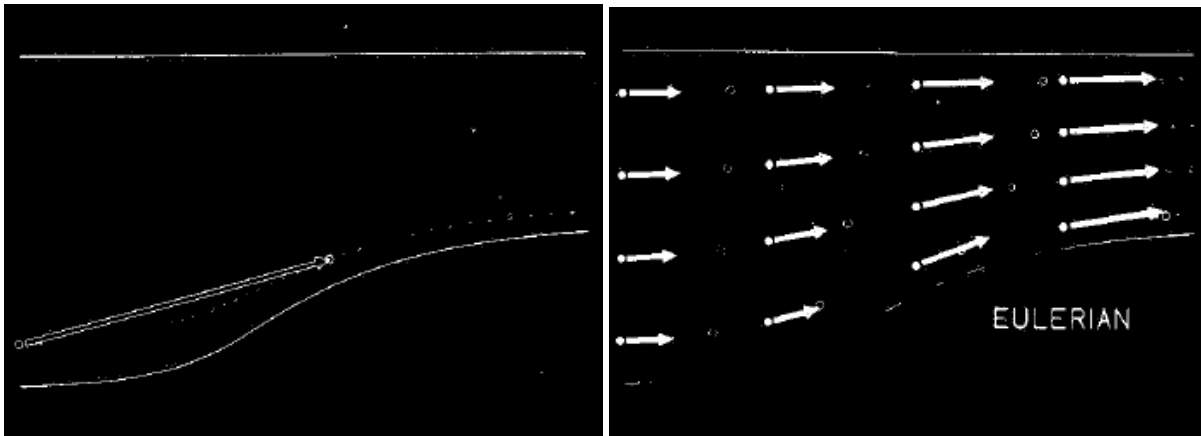


FIGURE 1.1 – (Gauche) Suivi d’une particule fluide en représentation lagrangienne. (Droite) Xhamp de vitesse en représentation eulérienne. (Multimedia Fluid Mechanics, CUP)

vitesse d’un fluide cela est illusoire d’autant que la connaissance lagrangienne de la vitesse, comme de la température, peut suffire. Par exemple le vacancier étudié n’a pas grand intérêt à connaître la température à Brest!

La description eulérienne des vitesses est plus usuelle que la description lagrangienne, car il est difficile de savoir où se trouvait une particule de fluide à l’instant initial.

Sauf mention contraire explicite, la description utilisée en mécanique des fluides est la description eulérienne :

$$\vec{v}(\vec{r}, t), \quad T(\vec{r}, t), \quad \rho(\vec{r}, t), \quad \text{etc.}$$

1.4 Mesure et caractérisation des écoulements

Dans cette question nous passons en revue quelques propriétés usuelles des écoulements.

1.4.1 Stationnarité

Commençons par une caractéristique simple : on dit qu’un champ de vitesse est STATIONNAIRE si en tout point de l’espace

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}. \quad (1.1)$$

Ce sera souvent le cas des écoulements que nous étudierons, et cela simplifie grandement leur représentation puisqu’une photo prise à un instant donné est valable pour tous les instants antérieurs et ultérieurs.

Exercice n°3 : Stationnarité des écoulements

Discuter le caractère stationnaire des écoulement donné dans le plan (Oxy) par

$$\vec{v}_1 = (\alpha x, -\alpha y) \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = (\alpha(x + v_0 t), -\alpha y).$$

1.4.2 Rotationnel

On appelle VORTICITÉ le champ de vecteurs $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$ et VECTEUR TOURBILLON le champ de vecteurs $\vec{\Omega} = \vec{\omega}/2$. Le vecteur tourbillon représente la rotation locale au voisinage d'une particule de fluide.

On dit qu'un champ de vitesse est irrotationnel si on a, en tout point de l'espace, $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$. Dans ce cas, le champ de vitesse dérive d'un POTENTIEL DES VITESSES φ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)$. On dit que l'écoulement est un ÉCOULEMENT POTENTIEL.

Remarque

C'est l'exact analogue du champ électrique en régime indépendant du temps :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V).$$

Certains énoncés choisissent d'ailleurs, sans conséquence, de garder en hydrodynamique la convention $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)$ issue de l'électrostatique.

Exercice n°4 : Vortex de Taylor

1. Tracer les lignes de courant de l'écoulement de champ de vitesse en coordonnées polaires $\vec{v} = \frac{\alpha}{r} \vec{u}_\theta$. Que vaut la vorticité dans un tel écoulement ?
2. Calculer la circulation de la vitesse sur un cercle centré sur l'origine.

1.4.3 Techniques expérimentales de mesure de vitesse

Un enjeu important de la mécanique des fluides est la *mesure expérimentale* des vitesses de l'écoulement. Vous serez confrontés en TP à quelques méthodes simples mais il peut être utile, pour les leçons notamment, d'avoir en tête quelques exemples de techniques plus « modernes » :

Mesure de forces ou de couples et étalonnage L'idée est de mettre un obstacle dans l'écoulement et de mesurer sa réaction à la force qui s'y exerce. C'est une méthode robuste et simple mais peu précise et qui perturbe l'écoulement.

Suivi de particules (particle tracking) On lâche une particule portée par l'écoulement et on mesure sa position au cours du temps. Par exemple, un ballon atmosphérique, une tâche de colorant, etc. C'est une mesure dite *lagrangienne* car on suit une particule au cours du temps. On n'accède pas à la vitesse en tout point à tout instant, mais seulement *au point où est la particule, à l'instant où elle y est*.

Anémométrie à fil chaud On mesure la température d'un fil mince parcouru par un courant électrique. La puissance d'entrée est parfaitement connue de sorte que la température du fil dépend de la dissipation, donc de la convection autour du fil. Cette méthode permet une mesure à assez haute fréquence (≈ 100 mesures par seconde) de la vitesse du fluide *en un point* (si le fil est immobile).

Anémométrie laser (LDV : Laser Doppler Velocimetry) La méthode est basée sur la détection de la lumière émise par une particule traversant le champ d'interférences à l'intersection de deux faisceaux lasers. Elle n'émet rien lorsque qu'elle est dans une frange sombre, de mais on reçoit des flash lumineux à chaque fois qu'elle passe dans une frange brillante et leur fréquence est liée à la vitesse de déplacement de la particule *dans la direction orthogonale aux franges*. C'est une méthode de mesure non perturbative d'une unique composante de la vitesse en un point. De plus, elle nécessite un fluide transparent au moins à la longueur d'onde du laser utilisé.

Anémométrie Doppler ultrasonore Basée sur le décalage Doppler d'une impulsion acoustique réfléchiée par une particule. Elle permet la mesure des vitesses longitudinales sur toute une ligne de visée.

Vélocimétrie par image de particules (PIV : Particle Image Velocimetry) On photographie une portion du fluide contenant des particules à plusieurs instant successifs puis on corrèle la position des particules pour savoir

de combien chacune a bougé. Les petites particules solides transportées par le fluide sont rendues visibles par un fort éclairage (par exemple un plan laser). Cette technique permet d'obtenir par calcul informatique un champ de vitesse sur un maillage du plan des images, où plus précisément les deux composantes de la vitesse contenues dans le plan de l'image, *en tout point et à tout instant*.

1.4.4 Trajectoires et lignes diverses

L'écoulement, mesuré ou simulé, est généralement représenté graphiquement. En fonction de ce qu'on veut mettre en évidence, mais aussi de la méthode employée pour le mesurer, différentes représentations peuvent être utilisées.

Trajectoire de particule (particle path)

La trajectoire d'une particule est l'ensemble des points occupés par une particule fluide au cours du temps. Mathématiquement on peut écrire : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = f(\vec{r}_0, t)$ où \vec{r}_0 est la position de la particule à l'instant initial. Cela correspond donc à un suivi lagrangien : par définition la tangente à la trajectoire est parallèle au vecteur vitesse qu'avait la particule à l'instant où elle passait en ce point. Une façon classique d'obtenir la trajectoire de traceurs est de prendre une photo en pause longue tout en éclairant de façon continue.

Ligne d'émission (streakline)

La ligne d'émission correspond à l'ensemble des points atteints à tout instant par des particules émises continuellement en un point \vec{r}_0 donné. Elles sont faciles à réaliser expérimentalement en prenant une photographie à un instant t d'un filet de colorant émis en continu depuis un certain temps à partir d'un point source fixe.

Si l'écoulement est stationnaire, la ligne d'émission coïncide avec la trajectoire de particule. Si l'écoulement évolue au cours du temps, en revanche, le vecteur vitesse n'a aucune raison d'être tangent à cette courbe.

Ligne de courant (streamline)

La ligne de courant permet de visualiser, à un instant donné, le flux macroscopique de matière : elle est tangente en tout point au vecteur vitesse en ce point. C'est, au sens usuel, une ligne de champ du champ de vitesse à l'instant t (au même titre que vous connaissez les lignes de champ électrique, magnétique, etc.)

Deux points à garder en tête :

- C'est une ligne théorique qu'il est difficile d'observer expérimentalement mais que l'on peut calculer à l'issue d'une simulation. Cela suppose de connaître, à l'instant qui nous intéresse, le champ de vitesse en tout point.
- Deux lignes de champ ne se croisent qu'en des points de stagnation où la vitesse est nulle.

Ligne de temps (timeline)

Le concept de ligne de temps est moins important que les précédents. C'est l'ensemble des positions occupées, à un instant t , par les points d'une ligne marquée dans le fluide à un instant initial et transportée (on dit *ADVECTÉE* ou *CONVECTÉE*) ensuite par l'écoulement. Elles sont assez faciles à réaliser expérimentalement et donnent une idée de la composante du vecteur vitesse normale (perpendiculaire) à la ligne.

Exercice n°5 : Lignes associées à un écoulement donné

Dessiner les lignes de courants, d'émission et les trajectoires de particules pour un écoulement unidirectionnel et homogène mais qui change de direction de 90° à un instant donné.

1.5 Dérivée particulière

1.5.1 Idée générale

La plupart des lois de la physique (la totalité de celles que vous rencontrerez) sont énoncées pour des *systèmes fermés*. Dans un premier temps on pourrait avoir envie d'appliquer ces lois à un sous-volume (par exemple méso-scopique) atour d'un point M de l'espace donné mais les mouvements macroscopiques de matière dans les fluides font qu'un tel système est *ouvert*, ce qui est problématique.

La particule de fluide en revanche présente l'intérêt d'avoir une masse constante au cours du temps. C'est donc à elles que s'appliqueront les lois de la physique. Lorsque ces lois font intervenir une dérivation, il va donc s'agir de dériver une grandeur *en suivant la particule fluide* en question. On parlera ainsi de DÉRIVÉE PARTICULAIRE ou DÉRIVÉE TOTALE (dans le sens où elle prend en compte les variations dues à l'évolution des champs dans le temps et au mouvement de la particule fluide par opposition à la DÉRIVÉE LOCALE, qui est simplement la dérivée partielle usuelle). On exprimera la dérivée en fonction des champs en description eulérienne.

1.5.2 Formules de dérivation totale

On cherche à exprimer la dérivée totale d'un champ scalaire (nommons le A). La particule de fluide à suivre se trouve en (x, y, z) à l'instant t et en $(x + dx, y + dy, z + dz)$ à l'instant $t + dt$. La dérivée particulière de A sera notée dans la suite $\frac{DA}{Dt}$ ³. On la calcule selon :

$$\frac{DA}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{A(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - A(x, y, z, t)}{dt}.$$

En effectuant un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$A(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = A(x, y, z, t) + \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz + \frac{\partial A}{\partial t} dt$$

et comme $v_x = dx/dt, \dots$

$$\boxed{\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})A}. \quad (1.2)$$

Le terme $\partial A/\partial t$ est appelé TERME LOCAL, le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})A$ est appelé TERME CONVECTIF.

Attention !

Il est primordial de n'avoir aucune hésitation sur l'expression de l'opérateur $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$. Pour un scalaire,

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})A = v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z}.$$

En l'appliquant à chaque coordonnée, on généralise immédiatement cette formule à un vecteur \vec{A} :

$$\boxed{\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{A}}, \quad (1.3)$$

3. Il n'est pas rare de noter la dérivée particulière comme la dérivée totale dA/dt . En effet, l'une comme l'autre prennent en compte l'ensemble des causes de variations de la quantité dans le temps. Ici on préfère la notation avec un « grand -D » pour bien marquer la différence.

au « détail » près que pour un vecteur l'opérateur $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$ prend son expression scalaire sur chaque coordonnée :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} = \begin{pmatrix} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})A_x \\ (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})A_y \\ (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Les termes $\partial \vec{A} / \partial t$ et $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{A}$ sont toujours appelés respectivement TERME LOCAL et TERME CONVECTIF.

Remarque

Lorsqu'on utilise des coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes, il faut utiliser les formules données dans le formulaire. Des termes apparaissent du fait que les vecteurs unitaires varient dans le temps.

Notons pour finir que si, appliqué à un scalaire, l'opérateur $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})A$ peut s'identifier à $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(A)$ il n'est pas question d'en faire autant pour un vecteur, dont le gradient seul n'aurait aucun sens. Dans la suite on pourra appliquer ces formules sans avoir à les redémontrer.

1.5.3 Dérivée particulière de la masse volumique - Écoulement incompressible

La masse volumique étant un scalaire, sa DÉRIVÉE PARTICULAIRE s'exprime simplement :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\rho \quad (1.4)$$

Un écoulement est dit INCOMPRESSIBLE si le volume de toutes les particules de fluide est indépendant du temps. Comme la masse d'une particule de fluide est constante par définition, un écoulement est incompressible si la masse volumique d'une particule fluide donnée ne varie pas, c'est-à-dire si :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1.5)$$

Attention !

On parle bien d'*écoulement* incompressible et pas de *fluide incompressible*. En effet, tout les fluides sont compressibles sous une contrainte suffisante. Réciproquement, certains écoulement sont incompressibles, y compris pour des fluides facilement compressibles comme les gaz (par exemple un écoulement de Poiseuille). Noter que, sauf cas exceptionnel, les écoulements que vous rencontrerez sont incompressibles pour tous les fluides.

Le caractère incompressible d'un écoulement est indépendant du référentiel choisi.

1.5.4 Dérivée particulière du vecteur vitesse

La formule vectorielle de la dérivée particulière (1.3) peut être appliquée à la vitesse :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}. \quad (1.6)$$

Le terme $\partial\vec{v}/\partial t$ est appelé ACCÉLÉRATION LOCALE; c'est l'accélération de la particule fluide due au fait qu'au point où elle est la vitesse eulérienne dépend du temps. Le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ est appelé ACCÉLÉRATION CONVECTIVE; c'est l'accélération de la particule fluide due au fait qu'elle se déplace dans l'espace et que la vitesse eulérienne n'est pas homogène.

Un résultat d'analyse vectorielle admis (et qui doit normalement être rappelé dans les énoncés) donne :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Le terme convectif est donc *non-linéaire* et est à l'origine de la complexité de l'hydrodynamique.

1.6 Équation locale de conservation de la masse

1.6.1 Équation dans le cas 1D

On considère des champs de vitesse et de masse volumique 1D $v(x)$ et $\rho(x)$ et une tranche d'espace de section dS comprise entre x et $x + dx$.

– Schéma –

La variation de masse entre t et $t + dt$ dans le volume délimité par x et $x + dx$ s'écrit :

$$dm = dm_e - dm_s, \quad (1.7)$$

où

- dm_e est la masse qui entre. Elle vaut $dm_e = \rho(x) dS v(x) dt$;
- dm_s est la masse qui sort. Elle vaut $dm_s = \rho(x + dx) dS v(x + dx) dt$.

La masse comprise dans la tranche à un instant t étant aussi $m = \rho(x, t)Ddx$ on peut écrire d'autre part que

$$dm = \rho(x, t + dt)Sdx - \rho(x, t)Sdx.$$

Finalement,

$$dm = \rho(x, t + dt)Sdx - \rho(x, t)Sdx = \rho(x) dS v(x) dt - \rho(x + dx) dS v(x + dx) dt,$$

d'où on déduit l'expression de l'ÉQUATION LOCALE DE CONSERVATION DE LA MASSE dans le cas 1D :

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0}. \quad (1.8)$$

1.6.2 Équation généralisée en dimension supérieure

Par analogie, la conservation de la masse dans le cas 3D (ou 2D) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0}. \quad (1.9)$$

La quantité $\rho \vec{v}$ est la DENSITÉ VOLUMIQUE DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT. La masse qui traverse une surface élémentaire dS entre t et $t + dt$, appelé DÉBIT MASSIQUE et exprimé en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, est ainsi

$$dD_m = \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}_M.$$

Le DÉBIT VOLUMIQUE, qui correspond au volume de fluide traversant dS entre t et $t + dt$, est exprimé en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et vaut

$$dD_V = \vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}_M.$$

Il est intéressant de noter le parallèle entre cette équation et l'équation de conservation de la charge en électromagnétisme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0,$$

où ρ est cette fois la charge volumique et $\vec{j} = \rho \vec{v}$.

Remarque

La preuve de (1.9) ne me semble pas primordiale mais s'écrit rapidement. Considérons un volume fixe \mathcal{V} . La variation de masse s'écrit :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau \right) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau,$$

la permutation dérivée/intégrale étant licite car le volume \mathcal{V} est fixe. D'autre part, le flux de masse entrant est ($d\vec{S}$ étant orienté vers l'extérieur comme il est d'usage) :

$$- \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

et peut se réécrire, en vertu du théorème de Green-Ostrogradski :

$$- \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\rho \vec{v}) \, d\tau.$$

L'un et l'autre étant égaux par conservation de la masse (pas de terme de création) il vient

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \, d\tau = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout volume \mathcal{V} l'intégrande est nulle en tout point.

1.6.3 Lien avec l'incompressibilité

La condition d'incompressibilité donnée par (1.5) couplée à la définition de la dérivée particulaire de la section 1.5.3 donne

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\rho = 0.$$

En incluant l'équation de conservation de la masse (1.9) et en se servant de la relation vectorielle

$$\text{div}(\alpha \vec{A}) = \alpha \text{div}(\vec{A}) + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\alpha),$$

On démontre la condition d'incompressibilité de l'écoulement

$$\boxed{\text{div}(\vec{v}) = 0}. \quad (1.10)$$

Exercice n°6 : Un écoulement incompressible

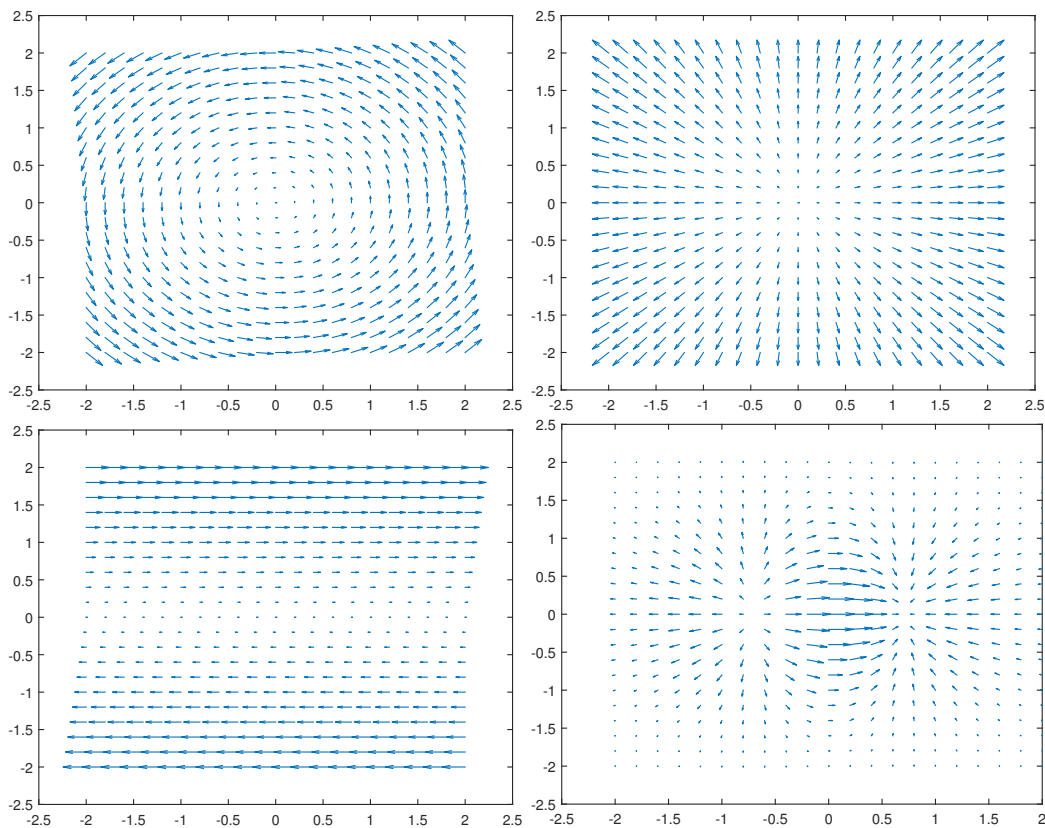
Montrer que l'écoulement $\vec{v} = \alpha x \vec{e}_y$ est incompressible.

Remarque

On distingue les écoulements incompressibles $\text{div}(\vec{v}) = 0$ des fluides incompressibles tels que $\chi_S = -(1/V) \frac{\partial V}{\partial p}|_S = 0$. Un fluide incompressible s'écoule toujours de manière incompressible, mais on peut avoir un écoulement incompressible d'un fluide compressible. En réalité, les notions de fluides incompressibles et d'écoulements incompressibles sont des approximations (qui sont souvent très bonnes). Ce qu'il est important de retenir c'est que l'écoulement de gaz en milieu non confiné (pas dans une seringue fermée dont on pousse le piston, par exemple) est souvent incompressible. Une condition nécessaire, mais pas suffisante, est que les vitesses caractéristiques soient faibles devant la vitesse du son.

1.7 Exercices supplémentaires**Exercice n°7 : Analyse de champs de vitesse**

Caractériser les écoulements de la figure suivante, notamment leur compressibilité et leur caractère irrotationnel.

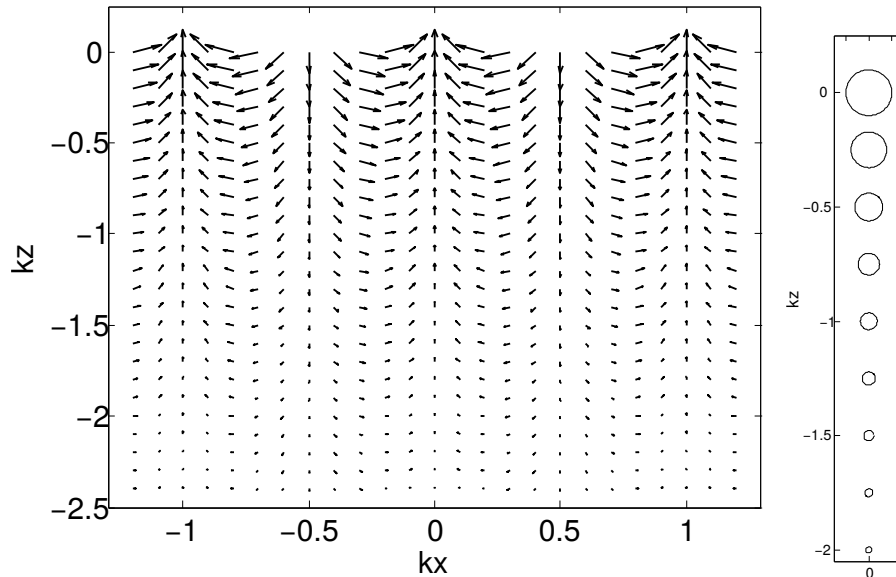
**Exercice n°8 : Cinématiques eulérienne et lagrangienne**

On considère le champ de vitesse $\vec{v} = (\alpha x, -\alpha y, 0)$, avec $\alpha > 0$.

1. L'écoulement est-il stationnaire ? compressible ? Irrotationnel ?

2. Tracer les lignes de courant associées à cet écoulement.
3. Calculer à l'instant t la position d'une particule située en $(x_0, y_0, 0)$ à $t = 0$. Tracer la trajectoire des particules.
4. Calculer la vitesse en utilisant la description lagrangienne. Calculer l'accélération en utilisant la description lagrangienne et comparer à l'accélération obtenue en utilisant la description eulérienne.

Exercice n°9 : Écoulement sous une onde de gravité



(à gauche) Champ de vitesse à $t = 0$. (à droite) Trajectoires des particules à différents z .

On considère une piscine remplie d'eau dont la verticale est donnée par l'axe Oz . La surface libre (interface eau-air) se trouve en $z = 0$ au repos. On considère l'écoulement donné pour $z \leq 0$ par l'expression :

$$\vec{v} = (v_0 e^{kz} \sin(\omega t - kx), 0, v_0 e^{kz} \cos(\omega t - kx)).$$

Ce champ de vitesse est associé à une onde de gravité (vague de grande longueur d'onde) se déplaçant selon l'axe Ox dans un bassin de grande profondeur. L'onde considérée est ainsi une onde progressive dans le sens des x croissants.

1. L'écoulement est-il stationnaire? compressible? irrotationnel?
2. Le champ de vitesse au temps $t = 0$ est donné en figure (a). Tracer les lignes de courant à cet instant.
3. Tracer l'allure de la surface libre à deux instants proches. En déduire la position de la surface libre sur la figure (a).
4. On note h la profondeur du bassin. Que signifie quantitativement « un bassin de grande profondeur »?
5. Calculer les trajectoires des particules de fluide dans le cas où v_0 est petite (on précisera la signification de cette hypothèse par la suite). Comparer avec la figure (b).
6. Comment s'exprime quantitativement l'hypothèse que l'amplitude A des mouvements est petite? Comment s'exprime quantitativement l'hypothèse que v_0 est petite?
7. Les trajectoires sont-elles confondues avec les lignes de courant? Discuter ce résultat.

Exercice n°10 : Tourbillon de Rankine

Dans cet exercice, nous considérons un écoulement incompressible de vitesse \vec{v} , de vorticité $\vec{\omega}$ et de vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$.

1. Faire une analogie entre un écoulement incompressible et la magnétostatique.
2. On considère le tourbillon de Rankine, qui est un tourbillon axisymétrique d'axe Oz caractérisé par :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \Omega \vec{e}_z \text{ si } r \leq a \\ &= \vec{0} \text{ si } r > a\end{aligned}$$

où Ω est une constante. Déterminer le champ de vitesse correspondant à cette distribution de vorticité.

Chapitre 2

Statique des fluides

On développe ici la statique des fluides à cheval sur les programmes de PCSI et BCPST2.

2.1 Forces surfaciques, forces volumiques

Les forces qui s'appliquent sur une particule de fluide sont de deux natures :

- les forces volumiques s'exercent sur l'intégralité de la particule. Exemples : le poids, les pseudo-forces d'inertie et de Coriolis, la force de Lorentz lorsque le fluide porte une charge électrique chargée, etc.
- les forces surfaciques ne s'exercent que sur la surface séparant la particule de fluide du milieu extérieur ; par exemple les frottements. Pour les fluides on parle plutôt de **PRESSION** lorsque la contrainte est normale à la surface et de **VISCOSITÉ** lorsqu'elle lui est tangentielle.

Bien que ces deux types de forces soit assez différentes, on peut les rassembler en cherchant *un équivalent volumique* des forces surfaciques. Ceci consiste à étudier les forces s'exerçant sur l'ensemble de la surface de la particule de fluide, et, dans la limite où la particule fluide est de très petite taille, à négliger la distinction volume/surface.

2.2 Forces de pression, résultante et équivalent volumique

2.2.1 Force de pression

Dans cette partie, on considère une particule fluide d'un fluide au repos. On admet que pour les fluides « simples » la force exercée par les autres particules fluides est une force de pression, colinéaire à la normale à la surface de la particule de fluide. Cette force vaut :

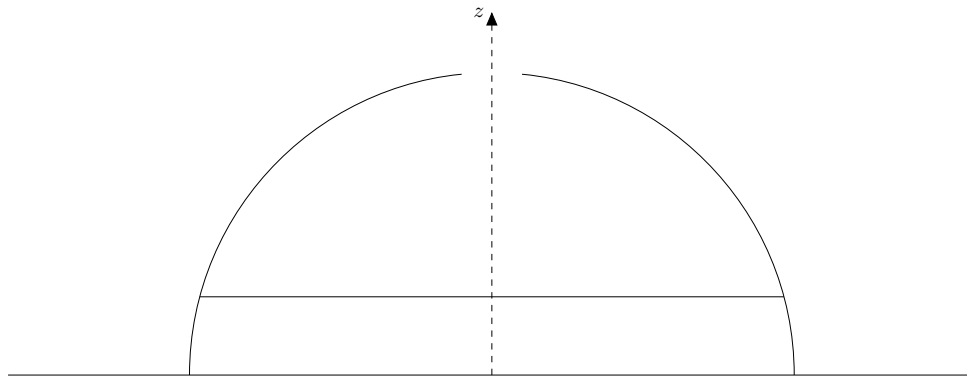
$$d\vec{F} = p dS \vec{n}.$$

La pression est indépendante de l'orientation de la surface de la particule de fluide. On dit qu'elle est **ISOTROPE**.

2.2.2 Calcul de la résultante

Exprimer la résultante des forces de pression sur un système donné implique de calculer l'intégrale $\iint p d\vec{S}$. En effet, la résultante des forces est bien la somme de toutes les forces qui s'exercent et le système, ici, est continu. Ne connaissant pas, a priori, l'expression de p en tout point du fluide, ce calcul est compliqué voire impossible.

Dans certains cas cependant, on pourra s'aider des symétries du système pour simplifier l'intégration et aboutir à une forme explicite de la résultante des forces de pression.

Exercice n°11 : Résultante des forces de pression

On considère une demi-sphère (saladier) de rayon R , de masse M , posée sur un plan horizontal. En son sommet est percé un trou qui permet d'y verser de l'eau. La pression dans l'air, supposée constante, est notée p_0 . Déterminer par un argument de symétrie la direction de la résultante des forces de pression. À partir de quelle hauteur d'eau h versée la demi-sphère se soulève-t-elle ? Est-ce toujours possible ?

2.2.3 Équivalent volumique

La résultante des forces de pression, qui est a priori une force surfacique, peut aussi s'exprimer sur le volume de la particule fluide. En effet,



Schéma pression

D'après le schéma, la force de pression sur la face x vaut : $d\vec{F}_1 = p(x) dy dz \vec{u}_x$ et celle sur la face $x + dx$ vaut : $d\vec{F}_2 = -p(x + dx) dy dz \vec{u}_x$.

La résultante des forces exercées par les particules de fluides environnantes selon x vaut ainsi :

$$d\vec{F}_x = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = p(x) dy dz \vec{u}_x - p(x + dx) dy dz \vec{u}_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} d\tau .$$

En appliquant le même raisonnement à y et z , on obtient :

$$d\vec{F} = -\frac{\partial p}{\partial x} d\tau \vec{u}_x - \frac{\partial p}{\partial y} d\tau \vec{u}_y - \frac{\partial p}{\partial z} d\tau \vec{u}_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z \right) d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) d\tau \quad (2.1)$$

L'expression $-\overrightarrow{\text{grad}}(p)$ est appelée ÉQUIVALENT VOLUMIQUE, ou DENSITÉ VOLUMIQUE des forces de pression.

Remarque

L'équation précédente peut également être obtenue sans hypothèse sur la forme de la particule de fluide en utilisant le théorème du gradient ^a :

$$\oint_{\Sigma} -p \vec{n} dS = \iiint -\overrightarrow{\text{grad}}(p) d\tau, \quad (2.2)$$

où \vec{n} est la normale sortante à la surface Σ .

a. Le théorème du gradient est le pendant du théorème de Green-Ostrogradski pour un scalaire.

2.3 Équation fondamentale de la statique des fluides

Considérons un fluide au repos dans un référentiel galiléen soumis à son poids comme seule force à distance.



Schéma

On applique le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide soumise à la gravité :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{pression}} \quad \text{d'où, à l'équilibre,} \quad \vec{0} = \rho d\tau \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(p) d\tau,$$

dont on déduit

$$\rho \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(p). \quad (2.3)$$

En projections sur les trois axes cartésiens il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ -\rho g &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Faites très attention au signe ! Dans la première expression avec le vecteur \vec{g} tout est positif, puis le signe apparaît du fait de l'axe z orienté vers le haut.

Remarque

- Comme toujours il faut se méfier de l'orientation de l'axe z qui peut varier selon les énoncés.
- À l'équilibre (statique) la pression ne varie que du fait de la masse de fluide de plus en plus grande qui appuie sur le fluide du dessous. Elle ne varie pas sur un plan horizontal.
- Il n'est pas nécessaire que ρ soit uniforme pour que (2.3) soit valable. Cependant, il faut noter qu'un fluide ne peut être au repos que si ρ ne varie que selon la direction verticale, et si le fluide le plus léger est toujours au-dessus du fluide le plus lourd.

Exercice n°12 : Pression dans un fluide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur

Comment la pression évolue-t-elle avec la hauteur dans un fluide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur \vec{g} constant ? Faire l'application numérique pour l'eau. Quelle est l'augmentation de la pression lorsque l'on descend de 10 m ?

Dans un fluide considéré incompressible, en particulier les liquides, la pression varie linéaire avec la profondeur.

2.4 Modèle de l'atmosphère isotherme et introduction au facteur de Boltzmann**2.4.1 Pression dans l'atmosphère isotherme**

Considérons maintenant la loi de pression dans un fluide compressible, comme l'air atmosphérique. Celui-ci est assimilé à un gaz parfait dont la température est grossièrement supposée constante égale à T_0 . *Comment évolue la pression avec l'altitude (ascendante) z ?*

Attention !

Contrairement à l'exercice précédent, l'air ne peut pas être supposé incompressible : ρ dépend de z ici et ça va tout changer !

Grâce à la symétrie sphérique on peut supposer que les variables d'état ne dépendent que de l'altitude z . Appliquons la relation fondamentale de la statique des fluides à une tranche d'atmosphère à l'altitude z :

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z)g.$$

En appliquant à l'air la relation des gaz parfaits il vient le lien entre la pression et la masse volumique $pV = nRT_0 \Rightarrow pM = \rho RT_0$. On obtient donc, en combinant ces deux équations :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0}z = -\frac{z}{H} \quad \text{où} \quad H = \frac{RT_0}{Mg}.$$

Il est primordial, ici, que la température T_0 soit fixée afin que H ne dépende pas de z . *Du fait que T_0 est constante*, donc, on peut intégrer cette dernière équation différentielle pour finalement obtenir la LOI DU NIVELLEMENT BAROMÉTRIQUE $p(z)$:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

Numériquement, à $T_0 = 300 \text{ K}$ avec de l'air de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et en prenant $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ on trouve

$$H = \frac{RT_0}{Mg} \approx 8,8 \text{ km}.$$

Cela donne une idée de la hauteur caractéristique de la décroissance de la pression dans l'atmosphère. Au-delà de quelques H (typiquement $3H$) la pression devient négligeable. C'est donc la hauteur typique de l'atmosphère terrestre.

2.4.2 Facteur de Boltzmann

Le facteur ¹ $\mathcal{K} = \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = \exp\left(-\frac{mgz}{kT_0}\right)$ est appelé FACTEUR DE BOLTZMANN. Il permet d'observer la statistique des particules de fluide en fonction de leur altitude : on compare l'énergie $E_p = mgz$ et l'énergie thermique $E_t = k_B T$.

Plus généralement, le facteur de Boltzmann d'un système d'énergie E s'écrit

$$\mathcal{K} = \exp\left(-\frac{E}{k_B T_0}\right).$$

Exercice n°13 : Interprétation probabiliste du facteur de Boltzmann

On rappelle l'évolution de la pression avec l'altitude dans l'atmosphère supposé isotherme :

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right),$$

avec $H = RT/Mg$. Interpréter ce résultat en terme probabiliste et commenter.

2.5 Principe d'Archimède

On considère un corps de volume \mathcal{V} entièrement plongé dans un fluide au repos. Alors ce corps subit une force dirigée vers le haut égale au poids du fluide déplacé, qui s'exerce au centre de masse G du liquide déplacé (G est appelé centre de poussée) :

$$\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{solide}} \vec{g}. \quad (2.4)$$

Démonstration :

Considérons un fluide au repos. On délimite, par la pensée, un certain volume V de forme quelconque au sein de ce fluide. Ce volume est lui aussi au repos : malgré son poids $\rho_f V \vec{g}$, ce volume ne tombe pas. Cela signifie donc que son poids est rigoureusement compensé par une force opposée, qui le maintient sur place, et qui provient du fluide extérieur. On la note $\vec{\Pi}$.

On remplace maintenant, toujours par la pensée, ce volume par un solide de même volume et forme. Comme la force qui maintenait le fluide en équilibre est une force de pression agissant à la surface du volume, cette même force s'applique encore au corps immergé : elle est toujours l'opposée du poids de fluide déplacé. C'est la poussée d'Archimède.

Autre preuve : Considérons à nouveau un solide de volume V , délimité par une surface fermée Σ , plongé entièrement dans un fluide de masse volumique ρ_f soumis à un champ de pesanteur \vec{g} , non nécessairement uniforme. Par définition de la pression p , la résultante des forces de pression exercées sur le volume est $\vec{F} = \oint_{\Sigma} p d\vec{S}$ où $d\vec{S}$ est un élément infinitésimal de la surface considérée, orienté par convention de l'intérieur vers l'extérieur de cette surface. Par le théorème du gradient puis la loi fondamentale de l'hydrostatique, cette expression devient :

$$\vec{F} = - \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}(p) d\tau = - \iiint_V \rho_f \vec{g} d\tau,$$

qui est exactement l'opposé du poids du volume de fluide déplacé. C'est la poussée d'Archimède.

1. La notation \mathcal{K} n'est pas une notation officielle.

Remarque

- L'hypothèse d'un corps entièrement plongé dans un fluide est essentielle.
- L'hypothèse de fluide au repos n'est pas essentielle, de même que rien n'impose que le corps soit un solide. Seule compte en fait la notion d'équilibre !

Exercice n°14 : La poussée d'Archimède dans l'eau

Considérons un solide de volume V et de masse volumique ρ_s flottant à la surface d'un liquide de masse volumique ρ_l .

1. Montrer qu'on a nécessairement $\rho_s < \rho_l$.
2. Application au cas d'un iceberg : considérons un morceau de glace pure à 0°C flottant dans de l'eau de mer. Cela correspond à $\rho_s = 0,917 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ et $\rho_l = 1,025 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Quelle proportion de l'iceberg est immergée ?
3. Glaçon qui fond dans un verre : comment évolue le niveau de l'eau lorsqu'un glaçon fond dans un verre ?

2.6 Exercices supplémentaires**Exercice n°15 : Manomètre à deux liquides**

On considère un manomètre à deux liquides schématiquement représenté sur la figure. Le liquide 1 de masse volumique ρ_1 (constante) est représenté en blanc, le liquide 2 de masse volumique $\rho_2 > \rho_1$ en noir (ρ_2 est également constante).

Le liquide 1 est en écoulement dans le gros tuyau, de manière à ce que les pressions P_A et P_B diffèrent de leur valeurs en régime statique. Par contre, les fluides à l'intérieur du tuyau latéral sont supposés au repos. Les deux fluides ne sont pas miscibles, et on néglige les effets de la tension de surface. Exprimer h en fonction des paramètres pertinents.

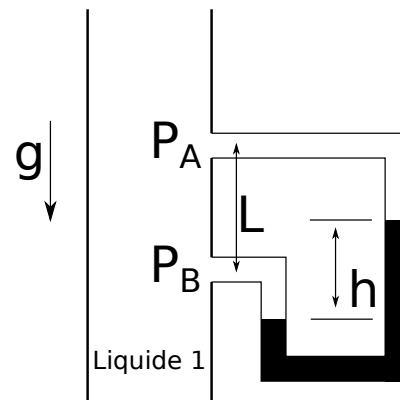


Schéma d'un manomètre à deux liquides.

Exercice n°16 : Hémisphères de Magdebourg

On considère deux hémisphères. Le rayon de ces hémisphères vaut $R = 21$ cm. Grâce à une pompe, on diminue fortement la pression à l'intérieur des deux hémisphères préalablement mises en contact. En supposant que la pression est nulle à l'intérieur des hémisphères (ce qui n'était pas le cas dans les expériences historiques), évaluer la force nécessaire pour les séparer.



Schéma des hémisphères de Magdebourg, et un dispositif expérimental. (Wikipédia)

Exercice n°17 : Équilibre d'un fluide en rotation

Un seau rempli d'eau tourne à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical ascendant Oz . Le référentiel du laboratoire étant considéré galiléen, on travaillera dans le référentiel \mathcal{R} du seau avec un repère cylindrique de vecteur radial \vec{u}_r lié au seau et de vecteur axial \vec{u}_z ascendant. L'eau est soumise à un champ de pesanteur uniforme \vec{g} et on s'intéresse à la répartition du fluide à l'équilibre (toutes les particules fluide sont immobiles).

1. Le référentiel \mathcal{R} est-il galiléen? Dresser la liste des forces s'appliquant sur une particule de fluide de masse dm et donner leur expression.
2. Montrer qu'on peut ramener l'expression de deux d'entre elles à une gravité apparente $\vec{g}_{\text{app}}(r, z)$ dont on donnera l'expression. Dessiner le champ.
3. En écrivant l'équilibre d'une particule fluide dans seau, établir l'équation vectorielle vérifiée par le champ de pression. La résoudre et proposer une fonction $P(r, z)$ qui soit solution. On placera l'origine au niveau de la surface de l'eau et on notera P_0 la pression atmosphérique.
4. Établir l'équation $z(r)$ de la courbe dessinée par la surface libre dans un plan vertical contenant l'axe Oz . Quelle est sa forme? Dépend-elle de la densité du fluide? Dessiner l'allure des isobares dans le fluide. Quelle propriété remarquable ces surfaces et le champ de pesanteur présentent-ils?

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(P) = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Exercice n°18 : Tube coudé

On considère un tuyau coudé partiellement plongé dans l'eau, en rotation autour de l'axe vertical. L'eau monte dans le tuyau sur une hauteur h . Exprimer h en fonction des paramètres du problème.

