

## TD n°IV : Machines thermiques

L'étude des machines thermiques revêt un intérêt à la fois pratique et historique puisqu'elles ont été essentielles à toute l'industrie du XXI<sup>ème</sup> siècle et que c'est par elles qu'est née la thermodynamique dans la première moitié du XIX<sup>ème</sup> (pour repère, le premier bateau à vapeur date de 1776, la première liaison transatlantique de 1838; la première locomotive à vapeur, elle, date de 1804).

**ATTENTION!** Vous prendrez soin de TOUJOURS orienter les flux (travail, transfert thermique, ...) de sorte qu'ils soient positifs lorsque le fluide de la machine reçoit effectivement de l'énergie.

### ♥ Exercice 16 : Généralités sur les machines thermiques

L'étude des machines thermiques demande de commencer par quelques définitions :

1. Définir les notions de transformation cyclique, machine thermique et source de chaleur.

2. Appliquer les deux principes de la thermodynamique à une machine thermique quelconque sur une durée d'un cycle.

♥ 3. Que nous apprennent ces principes dans le cas d'une machine thermique fonctionnant au contact d'une unique source de chaleur ?

4. Qu'apprend-t-on de ces principes dans le cas d'une machine purement thermique entre deux sources ( $W = 0$ ) ?

♥ 5. Fonctionnement des moteurs thermiques.

a. Définir la notion de moteur thermique.

b. Quelles contraintes sont imposées par les principes de la thermodynamique au fonctionnement d'un moteur thermique ?

*Indication : Il faudra avoir à la fois  $Q > 0$  donc  $\oint dQ > 0$  (premier pp) mais aussi  $\oint \frac{dQ}{T_{ext}} \leq 0$  (deuxième pp)... C'est pas gagné!*

6. On s'intéresse maintenant spécifiquement aux moteurs dithermes. On illustre l'étude sur une machine particulière, la machine de Carnot, mais l'étude est bien sûr généralisable à toute machine équivalente.

a. Définir le cycle de Carnot et le représenter dans les plans  $(T, S)$  et  $(V, p)$ .

b. Définir de manière générale le rendement d'un moteur et exprimer celui de la machine de Carnot en fonctionnement moteur en fonction des températures du

problème. Vous devriez, au passage, avoir démontré le théorème de Carnot (1824) :

- Parmi tous les moteurs pouvant fonctionner entre deux sources données, ceux qui opèrent suivant un cycle de Carnot obtiennent le plus grand rendement :

$$\eta \leq \eta^{\text{rev}}$$

- Le rendement d'un moteur qui opère suivant un cycle de Carnot est indépendant de la nature de l'agent qui le constitue et ne dépend que des températures  $T_C$  et  $T_F$  des deux sources de chaleur :

$$\eta^{\text{rev}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

7. Soit deux sources de chaleurs de températures différentes. Quel travail peut-on espérer en tirer au maximum ? ◀

### Exercice 17 : Machine thermique à trois pseudo-sources

On dispose de trois pseudo-sources de même capacité thermique finie  $C$ . L'ensemble de ces trois sources est isolé de l'extérieur et leur température respective sont notées  $T_1(t)$ ,  $T_2(t)$  et  $T_3(t)$  et valent respectivement, à l'instant initial,  $T_{10}$ ,  $T_{20}$  et  $T_{30}$ . On suppose  $T_{10}$  plus petite que les deux autres.

On envisage de porter l'une de ces trois sources, disons la source numéro 3, à la température la plus élevée possible.

1. En n'utilisant que ces trois sources de chaleur (c'est-à-dire sans apport extérieur de travail), quelle machine pouvez-vous mettre en place pour réaliser l'objectif ?

*Indication : Avec deux sources vous pouvez créer du travail, et avec deux autres alimentées par un travail extérieur vous pouvez inverser le sens du transfert thermique... a-t-on vraiment besoin de quatre sources différentes ?*

2. Écrire les bilans globaux d'énergie et d'entropie pendant  $dt$ . Commenter.

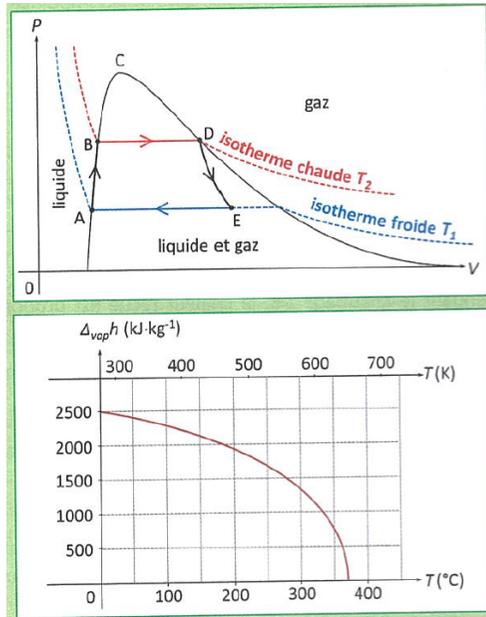
3. En déduire deux équations vérifiées par  $T_1(t)$ ,  $T_2(t)$  et  $T_3(t)$ .

4. Pourquoi la température de la source choisie ne peut-elle augmenter sans cesse ?

5. En déduire  $T_{\text{max}}$  et les températures finales des deux autres sources. Faire l'application numérique avec  $T_{10} = T_0$ ,  $T_{20} = 3T_0$  et  $T_{30} = 3T_0$ .

## Exercice 18 : Cycle d'une machine à vapeur

Une machine à vapeur fait décrire à une masse d'eau  $m = 1,00 \text{ kg}$  un cycle moteur au cours duquel celle-ci passe de l'état liquide à l'état vapeur. Le cycle de transformation ABDE est présenté ci-contre dans le diagramme de Clapeyron, sur lequel figurent également les courbes isothermes aux températures  $T_1 = 375 \text{ K}$  et  $T_2 = 500 \text{ K}$ . La transformation DE est une détente adiabatique réversible. L'eau liquide est assimilée à une phase condensée idéale de capacité calorifique massique  $c = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$ . L'enthalpie massique de vaporisation de l'eau est donnée par le diagramme associé.



1. Préciser l'état physique de l'eau aux quatre points du cycle. Caractériser alors les différentes transformations. Quelle simplification le modèle de la phase condensée idéale apporte-t-il à l'évolution AB ?
2. Identifier les deux étapes où le fluide reçoit effectivement de la chaleur. Déterminer le transfert thermique associé à ces étapes.
3. Exprimer la variation d'entropie de chaque étape du système, en utilisant lorsque cela est nécessaire le titre en vapeur  $x_v$  du système. Déterminer alors la valeur prise par  $x_v$  au point où le fluide est diphasé.
4. Exprimer la chaleur reçue sur les deux dernières étapes du cycle.
5. Définir et calculer le rendement de ce cycle. Comparer à la valeur d'un cycle idéal de Carnot et expliquer l'origine de la différence.

## Exercice 19 : Procédé Linde-Hampson pour la liquéfaction du diazote

La figure 3 représente le schéma de principe du procédé. L'azote gazeux entre dans le compresseur dans l'état 1 ( $P_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 293 \text{ K}$ ); il y subit une compression isotherme réversible qui l'amène à l'état 2. Il est alors refroidi à pression constante dans l'échangeur avant d'être détendu jusqu'à la pression atmosphérique dans le détendeur. L'azote liquide est extrait du séparateur; la vapeur sèche d'azote (état 6) est utilisée pour refroidir l'azote dans l'échangeur; on admettra que cette vapeur est ramenée à l'état 1 à la sortie de l'échangeur.

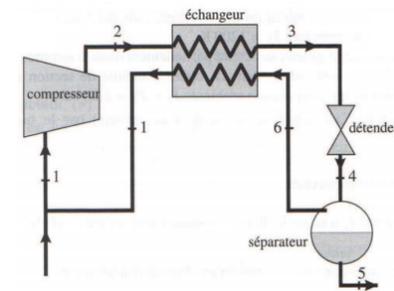


FIGURE 3 – Schéma de principe du procédé Linde-Hampson

L'étude de ce procédé de liquéfaction sera effectuée en utilisant les propriétés thermodynamiques réelles lues sur le diagramme  $(\ln(P), h)$  fourni figure suivante. Sur ce diagramme les températures sont en  $^\circ\text{C}$ , les volumes massiques en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ , les entropies massique en  $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Dans tout le problème on négligera les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. On étudie le fonctionnement de l'installation en régime stationnaire.

1. Énoncer et démontrer l'expression des premier et deuxième principes de la thermodynamique dans le cas d'un système ouvert en écoulement stationnaire. ♥
2. On admet que la compression de l'azote s'effectue de façon isotherme réversible de l'état 1 jusqu'à l'état 2 ( $P_2 = 200 \text{ bar}$ ). Déterminer le transfert thermique massique  $q_c$  et le travail massique utile  $w_c$  reçus par le gaz dans le compresseur. ∞

La transformation qui s'effectue dans le détendeur fait passer l'azote de 200 bar à 1,0 bar et le détendeur ne comporte pas de partie mobile. Le détendeur, le séparateur, l'échangeur et tous les circuits de liaison sont supposés parfaitement calorifugés.

3. Montrer que la température  $T_3$  doit être inférieure à une température  $T_{\max}$ , que l'on évaluera numériquement, si on veut obtenir un mélange liquide-vapeur dans l'état 4.  
4. Placer les points 5 et 6 sur le diagramme.

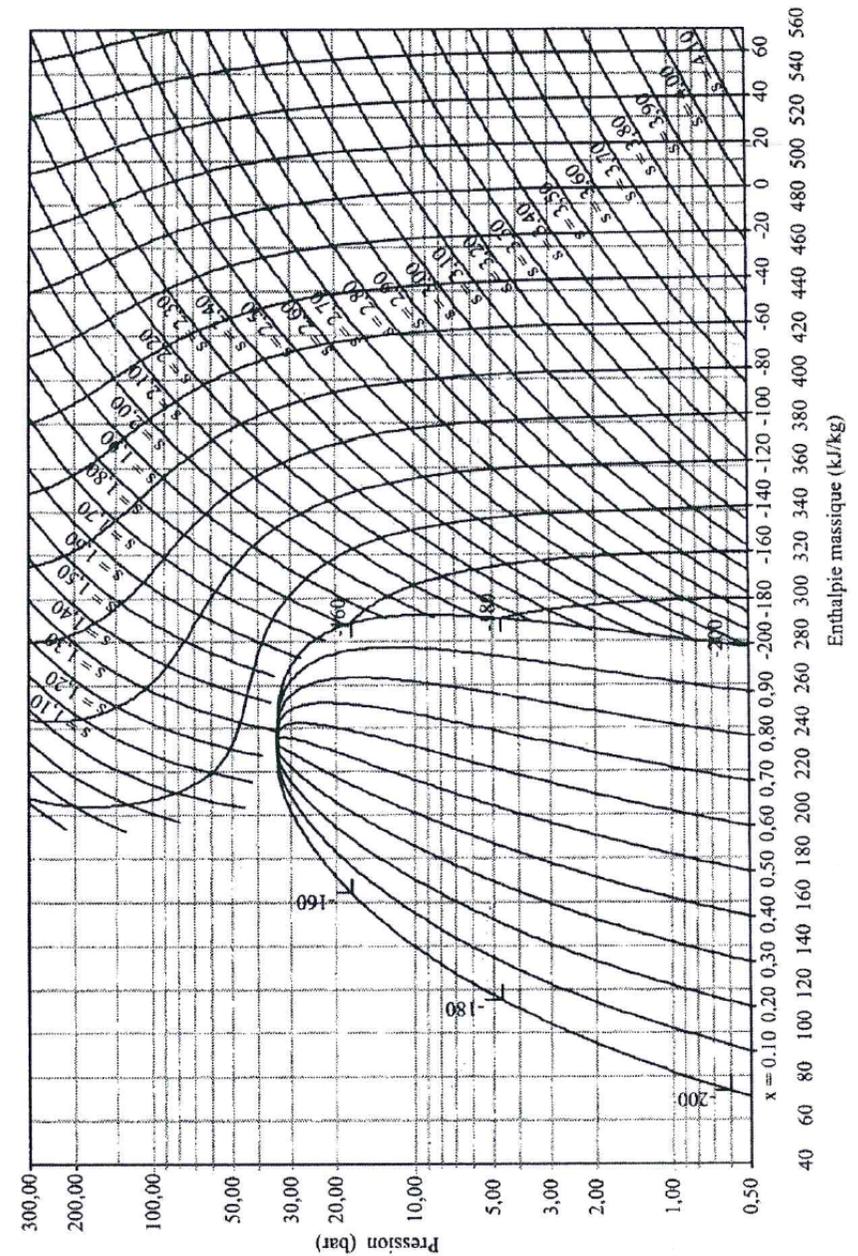
4. Dans l'échangeur thermique, les fluides s'écoulant en sens inverse dans les deux conduites échangent du transfert thermique entre eux. Il n'y pas de pièce mobile et l'échangeur est parfaitement calorifugé. On note  $D_m$  le débit massique dans la conduite 2-3 et  $D'_m$  celui dans la conduite 6-1. On note  $\Phi$  la puissance thermique passant de la conduite 2-3 à la conduite 6-1. Déduire de ces propriétés une relation entre les débits massiques  $D_m$  et  $D'_m$  et les enthalpies massiques des états 1, 2, 3 et 6.

5. On note  $y$  la fraction massique d'azote liquide dans l'état 4. Montrer que

$$y = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_5}$$

Calculer numériquement  $y$  puis  $h_3$  et  $h_4$ . Placer les points 3 et 4 sur le diagramme.

6. Calculer le travail de compression dépensé par kilogramme d'azote liquide produit. En déduire la puissance du compresseur si on produit 50 kg d'azote liquide par heure.



**Exercice 20 : Fonctionnement du moteur de Stirling (de CCP MP2011)**

*Remarque :* Cet exercice est long car très détaillé mais a priori assez accessible (tiré d'un écrit de CCP). Les dernières questions relèvent plus du TD sur les phénomènes de transport.

**Introduction** Le moteur de Stirling est constitué de deux chambres, l'une chaude et l'autre froide, reliées par un régénérateur de volume constant pouvant être constitué de fils de cuivre tressés (voir figure 4). Le gaz, en circuit fermé, reçoit un transfert thermique d'une source chaude et cède un transfert thermique à la source froide. Le rôle du régénérateur, base de l'invention de Stirling, est fondamental pour obtenir une bonne efficacité. Dans son brevet original de 1816, Stirling explique que le gaz chaud entre dans la partie chaude du régénérateur et est progressivement refroidi durant son parcours pour ressortir par l'autre extrémité à une température presque identique à la température de la source froide. Dans le parcours inverse, le gaz est progressivement réchauffé. Cette astuce technologique permet d'avoir une partie des échanges thermiques internes au moteur.

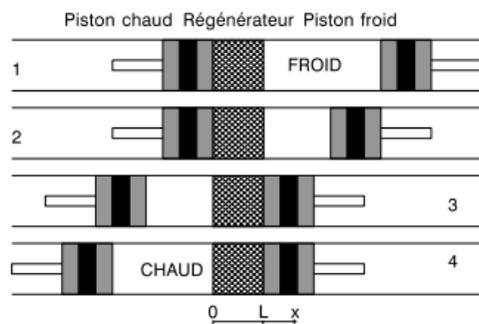


FIGURE 4 – Déplacement des pistons et régénérateur du moteur de Stirling.

Dans une première partie on comprend l'intérêt du régénérateur par le calcul de l'efficacité puis on analyse le rôle du volume et des pertes thermiques dans un régénérateur réel.

**Constantes du problème :**

**Constante des gaz parfaits :**  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

**Constante de Stephan :**  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-9} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^4$

**Masse molaire du dihydrogène :**  $M_{\text{H}_2} = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

**Rapport des capacités thermiques de  $\text{H}_2$  :**  $\gamma = C_p/C_V = 1,40$

**Masse volumique du cuivre :**  $\rho = 8913 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

**Chaleur spécifique massique du cuivre :**  $c = 387 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

**Conductivité thermique du cuivre :**  $\lambda = 362 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

**Masse molaire du sodium :**  $M_{\text{Na}} = 22,96 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

**Masse volumique du sodium :**  $\rho = 968 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

**Capacité thermique massique du sodium liquide :**  $c = 1230 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

**Température de vaporisation du sodium à pression atmosphérique :**  $T_v = 1156 \text{ K}$

**Enthalpie molaire de vaporisation du sodium à pression atmosphérique :**

$$\Delta H_{m,vap} = 99,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

**Description du cycle de Stirling étudié** Le cycle associé à un moteur de Stirling est constitué de 2 isothermes et de 2 isochores. Il est décrit comme suit :

1  $\rightarrow$  2 : compression isotherme à  $T_f = 313 \text{ K}$ ;

2  $\rightarrow$  3 : transformation isochore de la température  $T_f$  à la température  $T_c = 1173 \text{ K}$ ;

3  $\rightarrow$  4 : détente isotherme à  $T_c$ ;

4  $\rightarrow$  1 : transformation isochore de la température  $T_c$  à la température  $T_f$ .

**Caractéristiques** Pour ce moteur on retient les caractéristiques suivantes :

- Température de la source chaude : 1173 K
- Température de la source froide : 313 K
- Volume minimum du gaz (uniquement chambre chaude et/ou froide) :  $V_m = 1,0 \text{ L}$
- Volume maximum du gaz (uniquement chambre chaude et/ou froide) :  $V_M = 2,0 \text{ L}$
- Volume du régénérateur accessible (lorsqu'il est pris en compte) :  $V_r = 0,2 \text{ L}$
- Volume du régénérateur occupé par du cuivre : 0,6 L
- Masse de dihydrogène (assimilé à un GP) contenue dans le moteur : 0,01 kg.

1. Moteur de Stirling avec un régénérateur parfait.

Dans un premier temps on ne tient pas compte de la présence du régénérateur. Dans toutes les sous-questions qui suivent, le volume du régénérateur est nul ( $V_r = 0$ ), comme indiqué sur la figure 5.

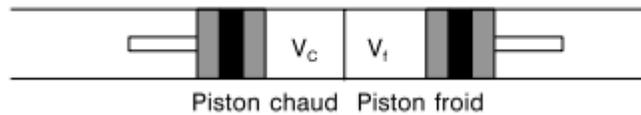


FIGURE 5 – Moteur de Stirling sans régénérateur.

- a. À partir des caractéristiques du moteur de Stirling, déterminer numériquement le nombre de moles  $n$  de gaz et les pressions  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  et  $p_4$ .
  - b. Représenter le cycle moteur de Stirling sur un diagramme  $p(V)$ .
  - c. Exprimer algébriquement la variation d'énergie interne  $\Delta U_{ab}$  et les transferts énergétiques,  $W_{ab}$  et  $Q_{ab}$ , entre un état  $a$  et un état  $b$  pour une transformation isotherme.
  - d. Exprimer algébriquement la variation d'énergie interne  $\Delta U_{cd}$  et les transferts énergétiques,  $W_{cd}$  et  $Q_{cd}$ , entre un état  $c$  et un état  $d$  pour une transformation isochore.
  - e. Calculer numériquement les travaux  $W_{1\rightarrow 2}$ ,  $W_{2\rightarrow 3}$ ,  $W_{3\rightarrow 4}$ ,  $W_{4\rightarrow 1}$ .
  - f. Calculer numériquement les transferts thermiques  $Q_{1\rightarrow 2}$ ,  $Q_{2\rightarrow 3}$ ,  $Q_{3\rightarrow 4}$ ,  $Q_{4\rightarrow 1}$ .
  - g. Que valent les transferts thermiques  $Q_c$  et  $Q_f$  provenant des thermostats chaud et froid si aucun dispositif supplémentaire n'intervient (pas de régénérateur) en fonction des transferts thermiques  $Q_{1\rightarrow 2}$ ,  $Q_{2\rightarrow 3}$ ,  $Q_{3\rightarrow 4}$  et  $Q_{4\rightarrow 1}$ ? Effectuer l'application numérique.
  - h. Que vaut le travail  $W$  sur le cycle? Effectuer l'application numérique.
  - i. En déduire numériquement l'efficacité sans régénérateur ( $e_{sr}$ ).
- En présence d'un régénérateur parfait (volume négligeable, transfert parfait), les transferts thermiques  $Q_{2\rightarrow 3}$  et  $Q_{4\rightarrow 1}$  sont internes.
- j. Vérifier que les transferts thermiques  $Q_{2\rightarrow 3}$  et  $Q_{4\rightarrow 1}$  se compensent. L'efficacité est alors calculée à partir de  $e = -\frac{W_{1\rightarrow 2} + W_{3\rightarrow 4}}{Q_{3\rightarrow 4}}$ .
  - k. Justifier cette expression.
  - l. Calculer algébriquement et numériquement l'efficacité ( $e$ ).
  - m. Comparer l'efficacité ( $e$ ) à l'efficacité de Carnot ( $e_c$ ).

## 2. Régénérateur non idéal

Le régénérateur peut être constitué d'un empilement de disques de fils de cuivre tressés. On suppose que la température dans le régénérateur varie linéairement avec l'abscisse selon la loi :  $T(x) = T_c + \frac{x}{L}(T_f - T_c)$ . On prendra pour origine des abscisses la frontière chambre chaude/régénérateur.  $L$  représente la longueur du régénérateur.

On ne tiendra nullement compte des aspects dynamiques. Il n'y a pas d'échange thermique entre les tranches élémentaires de fluide. Le volume accessible au gaz dans le régénérateur  $V_r$  est aussi appelé volume mort.

### a. Influence du volume mort du régénérateur

Dans le régénérateur, le gradient de température conduit à une distribution de densité moléculaire en fonction des abscisses. Il est donc intéressant de remplacer cette distribution liée au gradient de température par un système équivalent d'un point de vue mécanique : le régénérateur sera alors supposé occupé par  $n_r$  moles de dihydrogène à la température effective  $T_r$ , quelle que soit l'abscisse. Le volume mort du régénérateur vaut  $V_r = 0,2\text{L}$ .

i. Dans le régénérateur, en considérant que la pression est homogène, montrer que la température effective moyenne  $T_r$  s'exprime selon :

$$T_r = \frac{T_c - T_f}{\ln\left(\frac{T_c}{T_f}\right)}$$

### ii. Calculer numériquement $T_r$ .

Pour les sous-questions questions suivantes iii. à vi., toutes les molécules présentes dans le régénérateur seront supposées être à la température  $T_r$ .

iii. À partir d'un bilan de matière, exprimer la pression  $p$  en fonction de  $n$ ,  $R$ , des températures  $T_r$ ,  $T_c$ ,  $T_f$  et des volumes  $V_r$ ,  $V_c$  et  $V_f$ , volumes associés au régénérateur, au piston chaud et au piston froid (voir figure 3). On considérera la pression identique dans le régénérateur et les deux chambres.

iv. Exprimer littéralement le travail  $W_{1\rightarrow 2}$  puis effectuer l'application numérique.

v. Exprimer littéralement le travail  $W_{3\rightarrow 4}$  puis effectuer l'application numérique.

vi. Comparer la valeur numérique du travail sur le cycle avec un volume mort de régénérateur de  $V_r = 0,2\text{L}$  ( $W_{V_r} \neq 0$ ) à sa valeur obtenue sans volume mort ( $W_{V_r} = 0$ ). Commenter.

Pour les transferts thermiques, il est impératif de considérer le gradient de température dans le régénérateur.

vii. En discrétisant l'ensemble du système en fines tranches, chaque tranche de gaz est toujours à la température du thermostat local aussi bien dans les chambres que dans le régénérateur. Y a-t-il création d'entropie au cours d'un cycle? En déduire sans calcul l'efficacité.

### b. Perte thermique dans le régénérateur

Soit  $x$  la fraction de chaleur non échangée dans le régénérateur par le gaz lors de la transformation isochore ( $x$  varie de 0 à 1). Cette fraction est supposée identique dans

les deux sens de passage. Dans cette partie, le volume mort est supposé nul ( $V_r = 0$ ).

i. Donner une raison qui pourrait expliquer que le transfert thermique n'est pas idéal.

ii. Exprimer l'efficacité sous la forme :

$$e = \frac{1 - \frac{T_f}{T_c}}{1 + C_2 \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right)},$$

$C_2$  étant une constante à exprimer en fonction de  $x$ ,  $\gamma$ ,  $V_M$ ,  $V_m$ .

iii. Calculer numériquement  $C_2$  et l'efficacité qui en résulte, en considérant un transfert non idéal correspondant à  $x = 0, 1$ .

iv. Le volume de cuivre nécessaire à la construction du régénérateur vaut 0,6 L. Estimer la variation de température du cuivre induite par le passage du gaz du piston froid au piston chaud ( $2 \rightarrow 3$ ) dans le cas non idéal  $x = 0, 1$ .

c. Conduction thermique dans le régénérateur

Considérons une barre calorifugée en cuivre de longueur  $L = 2R_{Cu}$  et de section  $A = \pi R_{Cu}^2$  entre 2 thermostats de température  $T_c$  et  $T_f$ . On se place dans l'approximation d'un régime stationnaire.

i. Écrire la loi de Fourier.

ii. Calculer le flux de conduction thermique  $\Phi^c$  dans le cas d'un volume  $V = AL = 0,6L$ .

iii. Déterminer numériquement  $R_{Cu}$  et  $\Phi^c$ .

iv. Dans une réalisation technologique d'un régénérateur, on utilise un empilement de disques de fils de cuivre en treillis. La conduction thermique est donc bonne dans le plan des disques et moyenne selon l'axe  $x$ . Commenter.