TD n°IV : Machines thermiques

Correction de l'exercice 16 : Généralités sur les machines thermiques

1. Un système qui revient, après contact et échanges avec le milieu extérieur, dans un état final identique à son état initial effectue une transformation cyclique. C'est le cas, par exemple, du fluide qui circule dans le serpentin d'un réfrigérateur ou encore l'eau (liquide ou vapeur) du circuit secondaire d'une centrale nucléaire.

Une machine est dite thermique si elle n'échange avec l'extérieur que du travail mécanique et du transfert thermique.

Enfin, une source de chaleur est l'équivalent dans le cadre des machines thermiques de ce que nous avons appelé depuis le début thermostat : c'est un système extérieur à la machine susceptible de lui fournir de la chaleur sans voir varier sa température. La température d'une source de chaleur reste constante !

2. L'énergie interne U et l'entropie S étant des fonctions d'état leurs variations au cours d'un cycle sont nulles : $\Delta U = 0$ et $\Delta S = 0$. Le premier principe appliqué au fluide de la machine sur un nombre quelconque mais entier de cycle donne ainsi

$$\Delta U = W + \sum_i Q_i = 0\,,$$

et le second principe implique :

$$\Delta S = 0 \geq \oint \frac{\mathrm{d}Q}{T_{\text{ext}}} \quad \text{et égalité pour une transformation réversible.}$$

Rappelons que T_{ext} est la température du milieu extérieur au moment où la machine reçoit le transfert thermique $\mathrm{d}Q$.

3. Dans le cas d'un fonctionnement auprès d'une unique source de chaleur il vient simplement du premier principe $Q = -W$ et du second $Q \leq 0$ de sorte que seul le travail est effectivement reçu par la machine et est intégralement converti en transfert thermique.

Une machine thermique constituée d'une seule source de chaleur ne peut donc pas fournir de travail ou encore **« il n'existe pas de moteur monotherme »** (énoncé historique du second principe).

4. Supposons une asymétrie entre une source chaude de température T_C fournissant à la machine un transfert thermique Q_C et une source froide à T_F et fournissant Q_F. Comme $W = 0$, le premier principe implique

$$Q_F + Q_C = 0$$

et le second

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

Du premier on a immédiatement l'opposition des signes des deux transferts thermiques $Q_C = -Q_F$ et du second $Q_C/T_C \leq Q_F/T_F$ de sorte que l'un dans l'autre, et ayant supposé $T_C > T_F$, on conclut :

$$Q_C \geq 0 \qquad \text{et} \qquad Q_F \leq 0$$

La chaleur reçue par la machine de la source chaude est intégralement transférée à la source froide. La machine n'a rien apporté de plus qu'un contact thermique direct entre les deux sources. C'est l'énoncé de Clausius : « il est impossible de réaliser un processus dont le seul résultat [*i.e.* en particulier cyclique et sans travail] serait le transfert d'une quantité de chaleur d'un corps plus froid à un corps plus chaud ».

5.

a. Un moteur thermique est une machine susceptible de transformer la chaleur qu'elle reçoit en travail délivré à l'extérieur.

b. Le premier principe nous informe que $Q = -W$ or on veut bien sûr $W < 0$ donc

$$Q = \oint \mathrm{d}Q > 0$$

Le second principe stipule quant à lui (la variation d'entropie sur n (entier) cycles étant nulle et le terme de création positif) que

$$\oint \frac{\mathrm{d}Q}{T_{\text{ext}}} \leq 0$$

Ces deux conditions ne sont pas forcément contradictoires mais rien ne garantit non plus qu'elles soient toutes deux satisfaites. On a déjà démontré à la question **3.** que cela implique entre autre qu'il ne peut exister de moteur monotherme.

6. Pour plus de détails, vous pouvez consulter le DGLR de Thermodynamique, pp. 109 et suivantes.

a. Le moteur de Carnot est constitué de deux isothermes reliées par deux adiabatiques réversibles. Les graphes sont présentés sur la figure suivante.

 (cc) BY-NC-SA

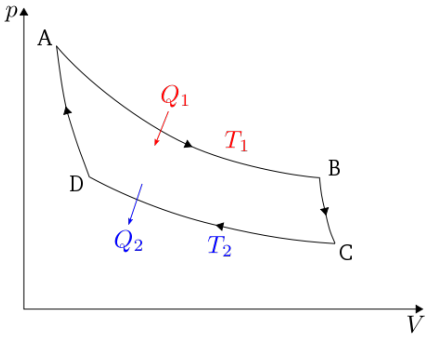


FIGURE 14 – Cycle de Carnot représenté dans le diagramme de Clapeyron pression / volume.

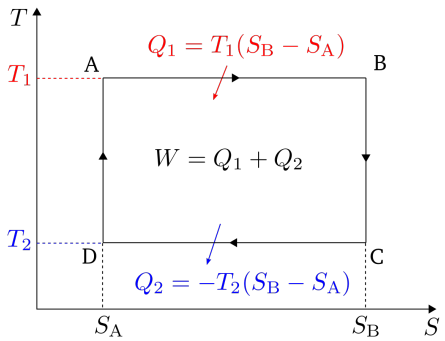


FIGURE 15 – Cycle de Carnot représenté dans le diagramme entropie / température.

Noter que si le tracé du cycle dans le diagramme (T,S) ne pose aucun problème celui dans le diagramme (P,V) demande de comprendre que les isothermes sont moins pentues que les adiabatiques réversibles (isentropes). C'est le cas pour le gaz parfait puisque les isothermes vérifient $P = nRT/V \simeq 1/V$ tandis que les isentropes répondent aux lois de Laplace et en particulier $P \simeq 1/V^\gamma$. Ainsi, tant que $\gamma > 1$ les isentropes sont plus pentues que les isothermes.

b. Le rendement d'un moteur consiste à comparer le bénéfice qu'on en tire au prix qu'il a fallu fournir pour l'obtenir. De toute évidence le bénéfice qu'on en tire est le travail fourni à l'extérieur $-W$ [ATTENTION au signe $-$: W est le travail reçu par la machine du fait de l'orientation systématiquement adoptée pour l'étude des machines thermiques]. Le prix à payer est le plus souvent de chauffer la source chaude mais il peut se présenter des exercices où la difficulté est de maintenir la source froide. Le plus souvent cela dit la source froide est un véritable thermostat (rivière, atmosphère, ...). Pour le cycle de Carnot on a

$$\eta = \frac{-W}{Q_c}$$

On s'assure que le rendement soit positif en ajoutant si nécessaire un signe adéquat et on vérifie qu'il est inférieur à 1 puisque (premier pp) : $W = -Q_f - Q_c$ donc

$$\eta = \frac{Q_f + Q_c}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c} \leq 1$$

Du second principe on tire

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

d'où, T_f et Q_c étant positifs,

$$\frac{T_f}{T_c} + \frac{Q_f}{Q_c} \leq 0 \Rightarrow \frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$$

On démontre alors le théorème de Carnot : dans le cas d'un fonctionnement réversible on a égalité

$$\boxed{\eta^{\text{rev}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}}$$

et dans le cas général on vérifie

$$\boxed{\eta \leq \eta^{\text{rev}}}$$

7. Dans le cas idéal, le travail récupérable est égal à la variation d'énergie interne du système :

$$\mathscr{T} = -W = U_i - U_f$$

La valeur de U_i étant fixée, le travail récupérable sera maximal lorsque U_f sera minimale. A volume et quantité de matière fixés, U_f ne peut dépendre que de l'entropie S_f et

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{T}}{\mathrm{d}S_f} = -\frac{\partial U_f}{\partial S_f} = -T_f$$

Comme T_f est positive on tire que le travail récupérable est une fonction décroissante de l'entropie et qu'il sera maximal lorsque l'entropie finale sera la plus faible possible. Étant donné le second principe appliqué au système global (sources + fluides...) isolé, l'entropie ne peut pas diminuer et la plus faible valeur atteignable est en fait la valeur initiale et le travail maximal récupérable est obtenu pour une transformation isentropique. C'est le cas notamment si les différentes étapes sont réversibles.

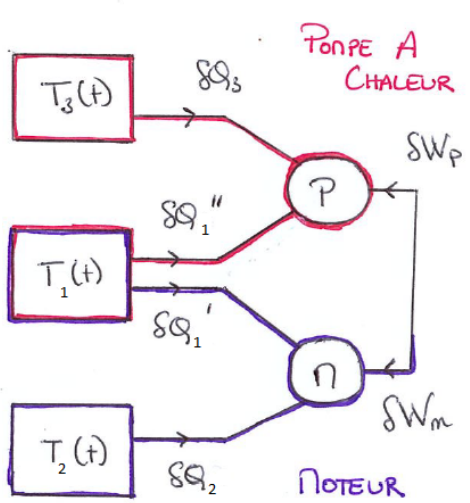
Correction de l'exercice 17 : Machine thermique à trois pseudo-sources

Remarque : Une pseudo-source est une partie de la machine thermique dont la température varie au cours du temps. Pour résoudre un problème de machine thermique lorsque la température des sources n'est pas fixe il faut appliquer les principes sur un unique cycle et écrire le premier principe au fluide, à la pseudo-source, et l'inégalité de Carnot-Clausius avant de tout combiner pour aboutir au résultat attendu.

 (cc) BY-NC-SA

1. L'indication de l'énoncé rend la chose relativement claire : il s'agit de créer du travail (moteur) à partir de deux sources de chaleur parmi les trois puis d'utiliser ce travail pour inverser le transfert thermique entre la troisième source et une des deux premières (frigo). Reste à décider quelle source joue quel rôle. Résumons donc les transformations que chacun subit :

- La source 3 est celle à réchauffer : on n'a pas intérêt à s'en servir dans le moteur puisque celui-ci a tendance à refroidir la source chaude. La source 3 sera donc la source chaude de la pompe à chaleur (qui va encore se réchauffer).
- La source 2, qui est chaude, est à la fois réchauffée en tant que source froide du moteur et refroidie en tant que source froide de la pompe à chaleur ?
- Reste à faire fonctionner le moteur entre les sources 1 et 2. La source 1 étant par hypothèse plus froide elle va jouer le rôle de source chaude du moteur.



Remarque : On peut montrer que quelle que soit la configuration de machines thermiques choisie, tant que la source 3 est bien réchauffée, le résultat final est le même. En revanche, injecter directement le travail fourni par le moteur dans la source 3 sous forme de chaleur est mons efficace que de construire une pompe à chaleur.

2. La température varie au cours du temps de sorte qu'on ne peut pas appliquer comme d'habitude les principes sur une durée trop longue. On travaille donc sur la durée d'un cycle notée $\mathrm{d}t$ et supposée courte devant le temps caractéristique de la variations de température (ce qui revient à dire que lors de son fonctionnement la machine va suivre un grand nombre de cycles). Les premier et second principes appliqués sur cette durée au fluide constituant le moteur et la pompe à chaleur respectivement permettent d'écrire :

- pour le moteur :

$$\delta Q_1 + \delta Q_2' + \delta W_m = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta Q_1}{T_1(t)} + \frac{\delta Q_2'}{T_2(t)} = 0,$$

- pour la pompe à chaleur :

$$\delta Q_2'' + \delta Q_3 + \delta W_p = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta Q_2''}{T_2(t)} + \frac{\delta Q_3}{T_3(t)} = 0.$$

De plus, on peut d'une part affirmer que $\mathrm{d}U = 0$ et $\mathrm{d}S = 0$ puisqu'on travail sur un cycle et que U et S sont des fonctions d'état. D'autre par, on a $S^{\text{créée}} = 0$ en supposant que les transformations sont toutes réversibles puisqu'on sait que c'est sous cette hypothèse que nous obtiendrons la température **maximale** à laquelle on peut porter la source 3.

En sommant les équations provenant d'un même principe pour chacune des machine et en notant $\delta Q_2 = \delta Q_2' + \delta Q_2''$ et que $\delta W_m = -\delta W_p$ il vient

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta Q_3 = 0$$
$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} + \frac{\delta Q_3}{T_3} = 0$$

***Remarque** : On aurait trouvé rigoureusement les mêmes équations si on avait orienté les flux différemment (mais c'est fortement déconseillé !) ou si on avait appliqué les principes, par exemple, aux sources plutôt qu'aux machines.*

3. Pour passer des équations sur les transferts thermiques à des équations sur les températures on va appliquer le premier principe aux sources de chaleur dont le volume ne varie pas (il est raisonnable de considérer que ce sont des phases condensées incompressibles et indilatables, les gaz ayant une capacité thermique nettement plus faible ils joueraient mal le rôle de « pseudo-source »). On obtient alors immédiatement $\mathrm{d}H_i = \delta Q_i = C\,\mathrm{d}T_i(t)$. En remplaçant dans les équations précédente et en simplifiant par la capacité thermique (les trois sources étant supposées de même capacité) on obtient les équations simples suivantes :

$$\mathrm{d}T_1(t) + \mathrm{d}T_2(t) + \mathrm{d}T_3(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}T_1(t)}{T_1(t)} + \frac{\mathrm{d}T_2(t)}{T_2(t)} + \frac{\mathrm{d}T_3(t)}{T_3(t)} = 0$$

qui s'intègrent, en notant les constantes S (pour « somme ») et P (pour « produit ») :

$$T_1 + T_2 + T_3 = S = T_{10} + T_{20} + T_{30}$$

 (cc) BY-NC-SA

$$\ln\left(\frac{T_1}{T_{10}}\right)+\ln\left(\frac{T_2}{T_{20}}\right)+\ln\left(\frac{T_3}{T_{30}}\right)=0\Rightarrow T_1T_2T_3=P=T_{10}T_{20}T_{30}$$

4. Nous avons conçu la machine de sorte que au cours du temps T_1 augmente et T_2 diminue et on sait qu'au départ $T_{10}<T_{20}$. Il arrive ainsi fatalement un instant pour lequel $T_1=T_2$. À ce moment le moteur devient monotherme et cesse de fonctionner.

5. À l'arrêt de la machine, notons $T_3=T_{\max}$ et $T_1=T_2=T_f$. On a alors

$$S=2T_f+T_{\max}$$
$$P=T_f^2T_{\max}$$

Cela nous fournit deux équations : une sur T_f seulement et l'autre sur $T_{\max}$ uniquement :

$$P=T_f^2(S-2T_f)$$
$$P=\left(\frac{S-T_{\max}}{2}\right)^2T_{\max}$$

Pour résoudre numériquement on adimensionalise les équations en posant $\theta=T/T_0$ et on note que, en grandeurs adimensionnalisées $P=9$ et $S=7$. Ainsi les résolutions successives (à la calculatrice) mènent à

$$\left(\frac{7-\theta_{\max}}{2}\right)^2\theta_{\max}=9\Rightarrow\theta_{\max}=\left\{\begin{array}{l}9\\4\\1\end{array}\right.$$

Or la valeur $\theta_{\max}=9$ est impossible car $\theta_{\max}$ doit rester inférieur à $S=7$ de même que la valeur $\theta_{\max}=1$ qui correspond à la valeur initiale de la température de la source 3 que l'on veut avoir réchauffée.

$$\theta_f^2(7-2\theta_f)=9\Rightarrow\theta_f=\left\{\begin{array}{l}3\\1{,}5\\-1\end{array}\right.$$

Cette fois, la valeur -1 est bien évidemment à éliminer puisque la température doit être positive, de même que $\theta_f=3$ puisque c'est la valeur initiale de la source 2 qui doit avoir refroidi ! Ainsi,

$$\boxed{\theta_f=1{,}5}\quad\text{et}\quad\boxed{\theta_{\max}=4}$$

Correction de l'exercice 18 : Cycle d'une machine à vapeur

1. Aux points A et B le système se trouve à la limite de la zone de changement d'état et de la zone d'état liquide, sur la courbe d'ébullition. Le fluide est à l'état liquide saturant. En D, le système est sous forme gazeuse et sur la courbe de rosée : c'est une vapeur saturée. Le point E est situé dans la zone d'équilibre liquide / vapeur : le système est diphasé et sa composition est caractérisée par une fraction massique de gaz x_v.

Dès lors, la transformations BD et EA sont des changements d'état (BD est un vaporisation complète et EA une liquéfaction de la partie du système qui se trouvait à l'état gazeux en E. La détente adiabatique DE s'accompagne aussi d'une liquéfaction partielle. AB correspond au chauffage du liquide.

2. Lorsqu'elle se vaporise (BD) l'eau reçoit un transfert thermique. Cette transformation est isobare de sorte que $Q_{BD}=m\Delta_{\text{vap}}h(T_2)$. La masse est connue (elle se vaporise en totalité) et l'enthalpie de changement d'état se lie sur le graphe à la température indiquée ($T_2=500\,\text{K}$) de sorte que

$$Q_{BD}=1{,}8\,\text{MJ}$$

L'eau reçoit aussi de la chaleur lors de la phase AB de chauffage et on a

$$Q_{AB}=mc\Delta T=523\,\text{kJ}$$

3. Pour les changements d'état BD et EA la variation d'entropie correspond au rapport de la variations d'enthalpie sur la température à laquelle le changement d'état a lieu :

$$\Delta S_{B\to D}=\frac{m\Delta_{\text{vap}}h(T_2)}{T_2}\quad\text{et}\quad\Delta S_{E\to A}=-x_v\frac{m\Delta_{\text{vap}}h(T_1)}{T_1}$$

Pendant la transformation AB l'eau est entièrement liquide et, assimilée à une phase condensée idéale, on a $\mathrm{d}V=0$ donc $\mathrm{d}U=mc\,\mathrm{d}T=T\,\mathrm{d}S$ et

$$\Delta S_{A\to B}=mc\int_A^B\frac{\mathrm{d}T}{T}\Rightarrow\Delta S_{A\to B}=mn\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

Enfin pendant l'évolution adiabatique réversible DE l'entropie ne varie pas :

$$\Delta S_{D\to E}=0$$

 (cc) BY-NC-SA

On finit de résoudre la question en remarquant que sur l'ensemble du cycle, l'entropie, fonction d'état, ne doit pas varier d'où

$$mc\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)+\frac{m\Delta_{\text{vap}}h(T_2)}{T_2}+0-x_v\frac{m\Delta_{\text{vap}}h(T_1)}{T_1}=0$$

qui mène directement à déterminer

$$x_v=\frac{cT_1}{\Delta_{\text{vap}}h(T_1)}\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)+\frac{T_1\Delta_{\text{vap}}h(T_2)}{T_2\Delta_{\text{vap}}h(T_1)}=0,79$$

Cette question met en exergue le fait que le second principe est bien un principe d'évolution et nous sert à caractériser l'état final du système pendant la transformation DE !

4. Le transfert thermique reçu pendant DE est nulle. Pendant la liquéfaction EA on a :

$$Q_{EA}=-x_v m\Delta_{\text{vap}}h(T_2)=-1{,}8\,\text{MJ}$$

5. La quantité d'intérêt ici est le travail **fourni** par la machine $-W$ et la quantité couteuse est la chaleur apportée soit $Q_{AB}+Q_{BD}$ de sorte que

$$r=1+\frac{Q_{EA}}{Q_{AB}+Q_{BD}}=0,23$$

qu'il faut comparer au rendement du cycle réversible de Carnot dont la valeur est

$$r_C=1-\frac{T_1}{T_2}=0,25$$

L'exploitation du changement d'état dans une machine présente un double intérêt : il met en jeu des transferts thermiques plus importants que les simples chauffages successifs et introduit des étapes réversibles qui rapprochent le cycle du cycle de Carnot idéal !

Correction de l'exercice 19 : Procédé Linde-Hampson pour la liquéfaction du diazote

1. La situation est représentée figure 16. On s'intéresse au système $\mathscr{S}$ qui est *ouvert* (du fluide le traverse en permanence) et de volume fixé entre les sections d'entrée et de sortie.

La stratégie à adopter dans l'immense majorité des cas où on a affaire à un système ouvert est de *se ramener à un système fermé* auquel on applique les théorèmes physiques habituels. C'est pourquoi on définit le système fermé Σ constitué :

- à l'instant t, du fluide contenu dans $\mathscr{S}$ (en t) et de celui qui va y pénétrer pendant $\mathrm{d}t$ (masse élémentaire $\mathrm{d}m_e$ contenue dans Σ_e) ;
- à l'instant $t+\mathrm{d}t$, du fluide contenu dans $\mathscr{S}$ (en $t+\mathrm{d}t$) et de celui qui en est sorti pendant $\mathrm{d}t$ (masse élementaire $\mathrm{d}m_s$ contenue dans Σ_s).

Ce système contient bien les mêmes particules à l'instant t et à l'instant $t+\mathrm{d}t$: il est fermé. On va ensuite appliquer les principes usuels de la thermodynamiques à Σ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.

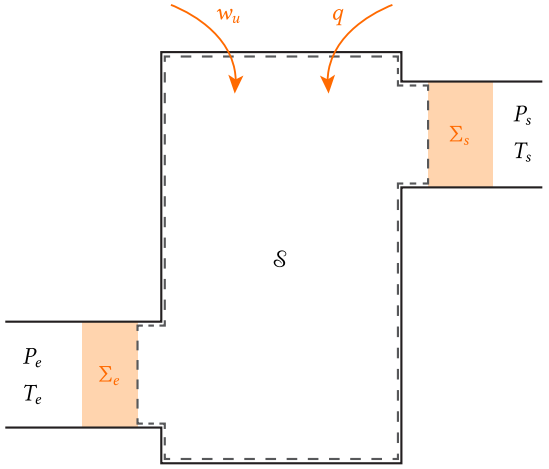


FIGURE 16 – Schéma d'un système en écoulement à une section d'entrée et une section de sortie. On a identifié le système ouvert $\mathscr{S}$ (délimité par la surface de contrôle en pointillés) ainsi que les sous-systèmes Σ_e et Σ_s.

 (cc) BY-NC-SA

On parle de *régime permanent* (ou régime *stationnaire*) lorsque, en tout point donné du système, chaque grandeur intensive est constante dans le temps. [7]

Pour des fluides en écoulement, on définit le DÉBIT MASSIQUE [8] à travers une surface S comme le rapport de la masse δm (comptée algébriquement) qui traverse cette surface entre t et $t+\mathrm{d}t$ et de la durée $\mathrm{d}t$:

$$D_m = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t} = \iint_S \rho\,\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \rho\,\vec{v}\cdot\vec{S}\,,$$

où la dernière égalité est valable pour un écoulement uniforme sur la surface S. Le signe du débit dépend de l'orientation relative de la surface et du champ de vitesses. Sauf mention contraire, on considèrera des débits positifs (surface orientée dans le sens de l'écoulement). Ainsi, les masses élémentaires contenues dans Σ_e et Σ_s peuvent se réécrire :

$$\mathrm{d}m_e = D_{m,e}\,\mathrm{d}t \quad , \quad \mathrm{d}m_s = D_{m,s}\,\mathrm{d}t\,.$$

En régime permanent, *le débit massique est conservé.* En effet, entre t et $t+\mathrm{d}t$, la masse contenue dans le système ouvert $\mathscr{S}$ varie de :

$$\mathrm{d}m_{\mathscr{S}} = \mathrm{d}m_e - \mathrm{d}m_s\,.$$

La masse volumique dans $\mathscr{S}$ étant constante, la masse contenue dans $\mathscr{S}$ aussi puisque c'est un système de volume fixé : $\mathrm{d}m_{\mathscr{S}} = 0$. Finalement, $\mathrm{d}m_e = \mathrm{d}m_s$ et on notera par la suite ces deux quantités $\mathrm{d}m$, ce qui peut se réécrire comme la conservation du débit massique :

$$D_m = D_{m,e} = D_{m,s} \qquad \text{où} \qquad D_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,. \tag{4}$$

Si on note respectivement v_e et v_s les volumes massiques en entrée et en sortie, les volumes des sous-systèmes Σ_e et Σ_s définis sur la figure 16 sont donc $\mathrm{d}V_{e,s} = v_{e,s}\,\mathrm{d}m = D_m v_{e,s}\,\mathrm{d}t$.

Appliquons maintenant le premier principe au système fermé Σ au cours de son évolution entre t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}(U+E_c+E_p) = \delta W + \delta Q\,,$$

où on a gardé l'énergie mécanique macroscopique dont la variation n'est pas a priori négligeable pour un système en écoulement (par exemple, altitude et vitesse peuvent être différentes en entrée et en sortie). On peut décomposer les transferts énergétiques en :

- δW_P, travail des forces de pression en amont et en aval,
- δW_u, travail « utile » qui correspond aux autres formes de travail reçues,
- δQ, transfert thermique échangé à travers les parois.

Rappelons que le travail d'une force conservative comme le poids est compris dans $\mathrm{d}E_p$. Le travail δW_P des forces pressantes se calcule via la formule générale $-P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V$ appliqué en entrée et en sortie. Il est ainsi constitué :

- du travail d'admission pour faire pénétrer Σ_e, qui vaut $-P_e(0-\mathrm{d}V_e) = P_e v_e\,\mathrm{d}m$,
- du travail de refoulement (ou d'échappement) pour évacuer Σ_s, qui vaut $-P_s(\mathrm{d}V_s - 0) = -P_s v_s\,\mathrm{d}m$.

Il sera plus pratique de ramener toutes les grandeurs à l'unité de masse du fluide. Ainsi on définit :

$$w_u = \frac{\delta W_u}{\mathrm{d}m} = \frac{\mathscr{P}_u}{D_m} \quad , \quad q = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}m} = \frac{\Phi_Q}{D_m}\,.$$

On a au passage défini les puissances correspondant aux transferts énergétiques : puissance utile $\mathscr{P}_u$ et puissance thermique Φ_Q.

Concernant la variation des fonctions d'état $\mathrm{d}E = E(t+\mathrm{d}t) - E(t)$, on utilise l'extensivité :

$$E(t) = E_{\mathscr{S}}(t) + U_{\Sigma_e} + E_{c,\Sigma_e} + E_{p,\Sigma_e} = E_{\mathscr{S}}(t) + \left(u_e + e_{c,e} + e_{p,e}\right)\mathrm{d}m$$

$$E(t+\mathrm{d}t) = E_{\mathscr{S}}(t+\mathrm{d}t) + U_{\Sigma_s} + E_{c,\Sigma_s} + E_{p,\Sigma_s} = E_{\mathscr{S}}(t) + \left(u_s + e_{c,s} + e_{p,s}\right)\mathrm{d}m$$

L'hypothèse de régime permanent permet d'éliminer $E_{\mathscr{S}}(t) = E_{\mathscr{S}}(t+\mathrm{d}t)$ et justifie le fait qu'on ait omis de préciser l'argument temporel pour les fonctions comme $u_{e,s}$.

Finalement, le premier principe devient :

$$\left(u_s + e_{c,s} + e_{p,s}\right)\mathrm{d}m - \left(u_e + e_{c,e} + e_{p,e}\right)\mathrm{d}m = (P_e v_e - P_s v_s)\,\mathrm{d}m + \left(w_u + q\right)\mathrm{d}m$$

On rappelle, que u, e_c et e_p sont l'énergie interne, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle massiques. En simplifiant par l'élément de masse et en faisant apparaître l'enthalpie massique :

$$h_{e,s} = u_{e,s} + P_{e,s} v_{e,s}\,,$$

7. Cela signifie que température, pression, masse volumique, etc. sont constantes *dans le temps* mais peuvent varier avec la position dans l'écoulement.

8. On définit aussi le DÉBIT VOLUMIQUE qui décompte le nombre de particules fluides traversant la surface pendant $\mathrm{d}t$:

$$D_V = \iint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

 (cc) BY-NC-SA

on arrive à l'expression finale :

$$\boxed{\left(h_s + e_{c,s} + e_{p,s}\right) - \left(h_e + e_{c,e} + e_{p,e}\right) = w_u + q}\,,$$

ou, en multipliant par le débit massique :

$$\boxed{D_m\left[\left(h_s + e_{c,s} + e_{p,s}\right) - \left(h_e + e_{c,e} + e_{p,e}\right)\right] = \mathscr{P}_u + \Phi_Q}\,. \tag{5}$$

Il est alors commode de noter avec un symbole Δ la différence entre sortie et entrée. En effet, en régime permanent, on peut voir dans $h_s - h_e$ la variation d'enthalpie massique d'une masse élémentaire de fluide se déplaçant de la section d'entrée et à la section de sortie. On purra en retenir l'écriture suivante :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_u + q\,. \tag{6}$$

Le travail utile est parfois appelé « travail indiqué massique » w_i d'une machine (c'est le cas dans le programme officiel de la filière PT).

Dans la majorité des cas, l'énergie potentielle sera celle de pesanteur, pour laquelle $e_p = gz$. On a alors $\Delta e_p = 0$ pour un écoulement horizontal. Par exemple la détente de Joule-Thomson, n'est qu'un cas particulier de ce qui précède. Il s'agit du cas où $w_u = q = 0$ et où les variations d'énergies cinétique et potentielle (écoulement horizontal) sont négligées. On retrouve bien $\Delta h = 0$: la détente est isenthalpique.

Pour l'entropie, on suit exactement la même stratégie, en écrivant le second principe pour le système fermé Σ :

$$\mathrm{d}S = \delta S_{\text{ech}} + \delta S_{\text{cre}}\,.$$

La variation $\mathrm{d}S$ se calcule comme pour l'énergie totale :

$$\begin{aligned} S(t+\mathrm{d}t) - S(t) &= S_{\mathscr{S}}(t+\mathrm{d}t) - S_{\mathscr{S}}(t) + S_{\Sigma_s} - S_{\Sigma_e} \\ &= 0 + (s_s - s_e)\,\mathrm{d}m = \mathrm{d}m\,\Delta s \end{aligned}$$

Utiliser la notation s_e pour l'entropie massique de la section d'entrée n'est pas judicieux, puisque cette notation est réservée généralement à l'entropie échangée massique (on définit de même l'entropie créée massique) :

$$s_e = \frac{\delta S_{\text{ech}}}{\mathrm{d}m} \qquad , \qquad s_c = \frac{\delta S_{\text{cre}}}{\mathrm{d}m}\,.$$

Si le transfert thermique avec l'extérieur a lieu avec un thermostat à T_{ext}, on aura $s_e = q/T_{\text{ext}}$.

Ces définitions permettent d'écrire la forme habituelle du second principe pour les systèmes en écoulement :

$$\Delta s = s_e + s_c\,. \tag{7}$$

L'écriture en multipliant par le débit massique ferait intervenir le taux d'entropie échangée et le taux de création d'entropie.

Remarque : les trois grands types de machines en écoulement sont les compresseurs ($P_m > 0$ et $|P_\theta| \ll P_m$), les turbines ($P_m < 0$ et $|P_\theta| \ll P_m$) et les échangeurs ($P_\theta \neq 0$ et $P_m = 0$ - pas de pièce mobile).

2. Il faut travailler avec le diagramme (cf. figure en fin de correction) : le point 1 est à l'intersection de l'isobare $p = 1\,\text{bar}$ et de l'isotherme $T = 20\,°\text{C}$; le point 2 est sur la même isotherme et sur l'isobare $p = 200\,\text{bar}$. On lit alors sur le diagramme $h_1 = 508\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $h_2 = 475\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Aussi, $s_1 = 3{,}86\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $s_2 = 2{,}17\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

Le fonctionnement du compresseur étant réversible on a $s_{\text{cre}} = 0$ et alors en appliquant le second principe en écoulement $s_2 - s_1 = \frac{q_C}{T_{\text{ext}}}$ d'où on déduit $q_C = -495\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

L'application du premier principe donne pour le fluide dans le compresseur $h_2 - h_1 = w_{u,C} + q_C$ car on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle de sorte que $w_{u,C} = 462\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

3. Le premier principe en écoulement appliqué au fluide dans le détendeur donne $h_4 - h_3 = 0$ (le détendeur est calorifugé et sans pièce mobile). La transformation est donc isenthalpique. Les points 3 et 4 sont ainsi sur une même verticale. Le diagramme montre alors que le point 4 tombera dans la zone d'équilibre liquide-vapeur à condition que le point 3 est à gauche du point A indiqué sur la figure. En ce point la température vaut $T_{\max} = -95\,°\text{C}$. Comme le long d'une isobare la température augmente vers la droite il faut $T_3 < T_{\max}$.

Les points 5 et 6 sont sur l'isobare $p = 1\,\text{bar}$ et sur la courbe d'ébullition et de rosée respectivement. On lit alors $h_5 = 82\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $h_6 = 281\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

4. Dans l'échangeur, le transfert thermique reçu par le fluide dans une conduite ne provient que de l'autre conduite puisque l'échangeur est parfaitement calorifugé. Ainsi (attention au sens de Φ),

$$q = -\frac{\Phi}{D_m} \quad \text{et} \quad q' = \frac{\Phi}{D'_m}$$

On applique alors le premier principe pour un système ouvert aux deux portions de conduite : Pour la conduite 2-3 il n'y a pas de pièce mobile et le transfert thermique reçu est q de sorte que $h_3 - h_2 = q$. De même, $h_1 - h_6 = q'$.

 (cc) BY-NC-SA

En liant tout ça on sort

$$D_m(h_3 - h_2) + D'_m(h_1 - h_6) = D_m q + D'_m q' = -\Phi + \Phi = 0$$

5. L'enthalpie étant extensive on peut écrire

$$h_4 = y h_5 + (1-y) h_6$$

Or, $D'_m = (1-y) D_m$. En effet, a travers une machine le débit se conserve (ce qui entre sort, en régime stationnaire) sauf dans le séparateur puisque celui-ci possède une entrée mais deux sorties ! Le débit en sortie de vapeur est directement proportionnel à la quantité de vapeur dans le séparateur et au débit en entrée.

La formule de l'échangeur thermique établie dans la question précédente s'écrit : $D_m(h_3 - h_2) + D'_m(h_1 - h_6) = 0$ d'où $(h_3 - h_2) + (1-y)(h_1 - h_6) = 0$. La relation $h_3 = h_4$ s'écrit en utilisant les deux questions précédents

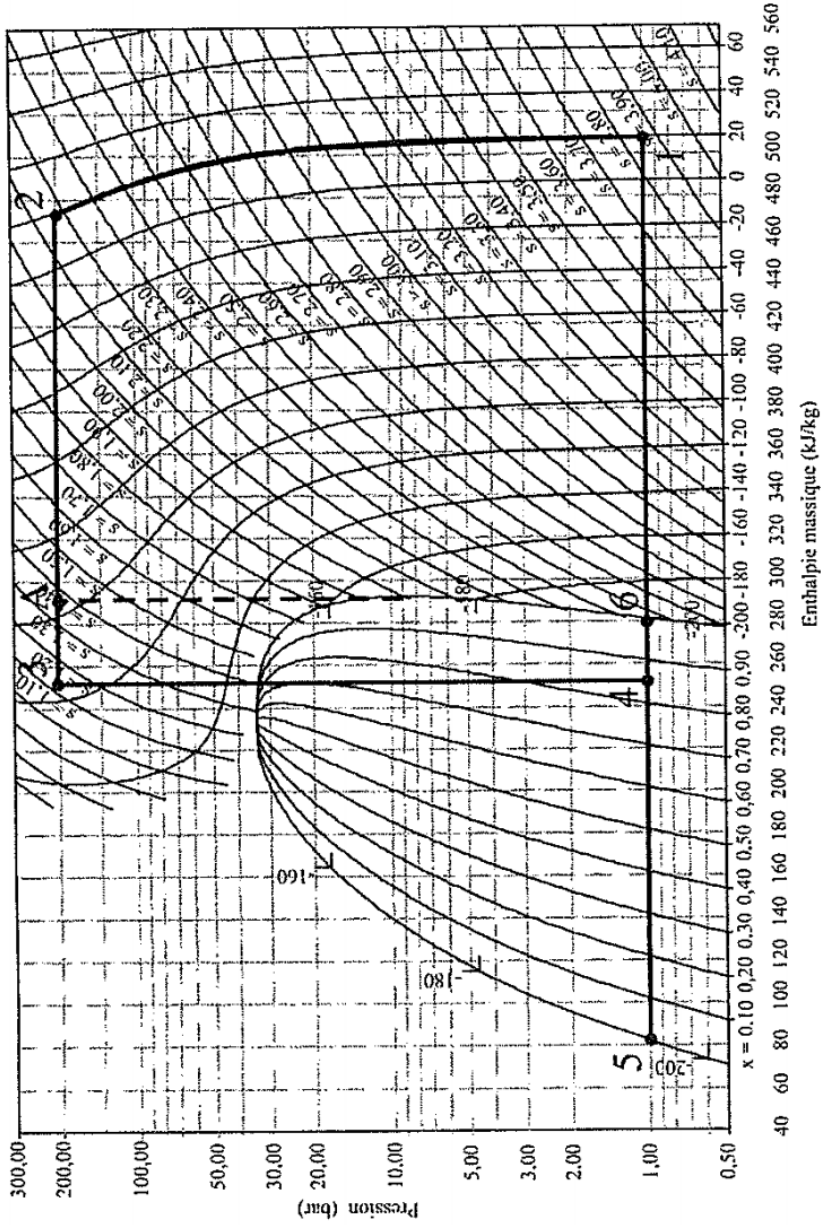
$$y h_5 + (1-y) h_6 = h_2 - (1-y)(h_1 - h_6) \Rightarrow y = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_5}$$

L'application numérique donne $y = 0,077$. Il vient ensuite $h_3 = h_4 = 266\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ ce qui permet de placer les points 3 et 4 sur le diagramme.

6. Le travail de compression par kilogramme d'azote liquide produit est

$$w'_{u,C} = \frac{w_{u,C}}{y} = 6{,}0.10^6\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

Pour une production de 50 kg par heure soit $1{,}4.10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$ il faut fournir une puissance de 83 kW.



Correction de l'exercice 20 : Fonctionnement du moteur de Stirling

1.

a. D'après la masse de dihydrogène contenue dans le moteur, $n = 5{,}0\,\text{mol}$. On calcule alors par la loi des gaz parfaits

$$p_1 = \frac{nRT_f}{V_M} = 65\,\text{bar} \quad ; \quad p_2 = \frac{nRT_f}{V_m} = 130\,\text{bar}$$
$$p_3 = \frac{nRT_c}{V_m} = 488\,\text{bar} \quad ; \quad p_4 = \frac{nRT_c}{V_M} = 244\,\text{bar}.$$

b. Le cycle est proposé sur la figure 17

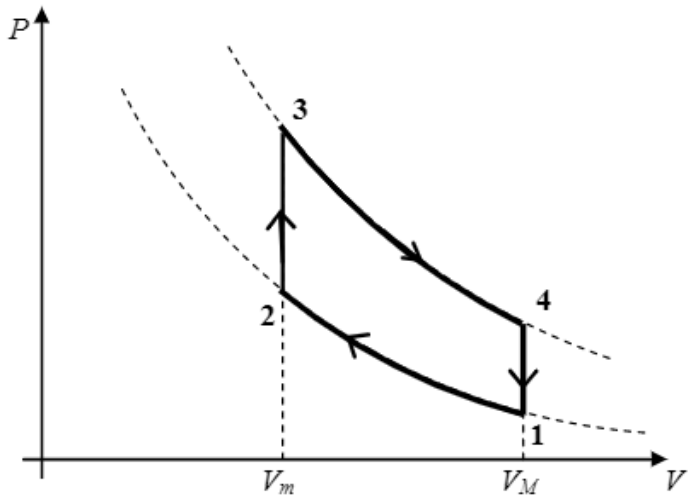


Figure 17 – Cycle du moteur de Stirling

c. Pour une transformation isotherme, l'énergie interne du gaz parfait, qui ne dépend que de la température, ne varie pas : $\Delta U_{ab} = 0$.

Si l'isotherme est parcourue de manière quasi-statique, on aura tout au long de la transformation $\delta W = -p_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V = -nRT\,\mathrm{d}V/V$. Intégrée sur toute la transformation on obtient, avec T constante,

$$W_{ab} = nRT\ln\frac{V_a}{V_b}.$$

Par application du premier principe $\Delta U_{ab} = 0 = W_{ab} + Q_{ab} \Rightarrow Q_{ab} = -W_{ab}$.

d. On a, pour le gaz parfait, $\Delta U = C\Delta T$ d'où dans ce cas précis $\Delta U_{cd} = n\dfrac{R}{\gamma-1}(T_d - T_c)$.

Pour une isochore le travail des force de pression est nul donc on réduit $W_{cd} = 0$. Par application à nouveau du premier principe il vient $Q_{cd} = \Delta U_{cd}$.

e. Progressons dans l'ordre :

$1 \to 2$: isotherme à T_f de V_M à V_m donc $W_{1\to2} = nRT_f\ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right) = nRT_f\ln(2) = 9{,}02\,\text{kJ}$.

$2 \to 3$: isochore, donc $W_{2\to3} = 0$.

$3 \to 4$: isotherme à T_c de V_m à V_M donc $W_{3\to4} = nRT_c\ln\left(\dfrac{V_m}{V_M}\right) = -nRT_c\ln(2) = -33{,}8\,\text{kJ}$.

$4 \to 1$: isochore, donc $W_{4\to1} = 0$.

f. Rebelote pour les transferts thermiques :

$1 \to 2$: isotherme à T_f de V_M à V_m donc $Q_{1\to2} = nRT_f\ln\left(\dfrac{V_m}{V_M}\right) = nRT_f\ln(2) = -9{,}02\,\text{kJ}$.

$2 \to 3$: isochore de T_f à T_c donc $Q_{2\to3} = \dfrac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f) = 89{,}4\,\text{kJ}$.

$3 \to 4$: isotherme à T_c de V_m à V_M donc $Q_{3\to4} = nRT_c\ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right) = nRT_c\ln(2) = 33{,}8\,\text{kJ}$.

$4 \to 1$: isochore de T_c à T_f donc $Q_{4\to1} = \dfrac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_c) = -89{,}4\,\text{kJ}$.

g. Lorsque le gaz s'échauffe pendant $2 \to 3$ l'énergie vient nécessairement du thermostat de chaud et de même sur l'isotherme $3 \to 4$. On a donc $Q_c = Q_{2\to3} + Q_{3\to4} = 123{,}2\,\text{kJ}$.

À l'inverse le transfert thermique $Q_{4\to1}$ ne peut venir que de la source froide de même que $Q_{1\to2}$ d'où $Q_c = Q_{4\to1} + Q_{1\to2} = -98{,}4\,\text{kJ}$.

h. Sur un cycle, du fait que U est une fonction d'état, on a nécessairement $\Delta U = 0$. Il faut donc que $W = -(Q_c + Q_f)$. On trouve alors $W = -24{,}9\,\text{kJ} < 0$ confirmant que c'est un cycle moteur. Le résultat est le même si on additionne les travaux des quatre étapes du cycle bien sûr.

i. L'efficacité vaut

$$e_{\text{sr}} = \left|\frac{W}{Q_c}\right| = 0{,}201\,.$$

 (cc) BY-NC-SA

j. On a déjà fait les calculs permettant d'affirmer que $Q_{2\to3} = -Q_{4\to1}$.

k. Puisqu'ici $Q_{2\to3}$ et $Q_{4\to1}$ sont internes le seul transfert thermique provenant de la source chaude est $Q'_c = Q_{3\to4}$. La nouvelle efficacité est alors

$$e = \left|\frac{W}{Q'_c}\right| = -\frac{W_{1\to2} + W_{3\to4}}{Q_{3\to4}}.$$

l. D'après les expressions et valeurs numériques déjà trouvées on déduit $e = 0{,}733$. On peut d'ailleurs exprimer $e = 1 - T_f/t_c$.

m. On reconnaît l'expression du rendement idéal de Carnot pour une machine ditherme.

2.

a.

i. Notons S la section du volume accessible au gaz dans le régénérateur de sorte que $V_r = SL$. Dans la tranche comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ on trouve $\mathrm{d}n$ moles de gaz à température $T(x)$ sous la pression p qui est supposé uniforme. La loi des gaz parfaits donne ainsi

$$\mathrm{d}nRT(x) = pS\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}n = \frac{V_r}{L}\frac{p}{RT(x)}\mathrm{d}x.$$

On a alors

$$n_r = \int_{x=0}^{L} \frac{V_r}{L}\frac{p}{RT(x)}\mathrm{d}x = \frac{pV_r}{RT_r} \quad \text{par définition de } T_r.$$

Finalement

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{L}\frac{1}{T(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{LT_c + (T_f - T_c)x}\mathrm{d}x.$$

T_r est dont la moyenne harmonique de $T(x)$. Une primitive de $1/(ax+b)$ est $\ln(ax+b)/a$, donc

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{T_f - T_c}\ln\left(\frac{LT_c + (T_f - T_c)L}{LT_c}\right) = \frac{1}{T_c - T_f}\ln\left(\frac{T_c}{T_f}\right).$$

C'est bien l'expression proposée par l'énoncé.

ii. L'application numérique donne $T_r = 651\,\mathrm{K}$.

iii. Le dihydrogène (n moles au total) se partage entre le cylindre roid (n_f moles), le régénérateur (n_r moles) et le cylindre chaud (n_c moles). On a donc

$$n = n_f + n_r + n_c = \frac{pV_f}{RT_f} + \frac{pV_r}{RT_r} + \frac{pV_c}{RT_c}, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{nR}{\dfrac{V_f}{T_f} + \dfrac{V_r}{T_r} + \dfrac{V_c}{T_c}}.$$

iv. D'après la première figure de l'énoncé, pendant $1 \to 2$ on a $V_c = 0$ et V_r ne change pas. V_f passe de V_M à V_m. On a donc

$$W_{1\to2} = -\int_{V_f=V_M}^{V_m} p(V_f)\,\mathrm{d}V_f = -\int_{V_M}^{V_m}\frac{nR}{\dfrac{V_f}{T_f} + \dfrac{V_r}{T_r}}\mathrm{d}V_f = nRT_f\ln\left(\frac{V_M + V'_r}{V_m + V'_r}\right),$$

avec $V'_r = V_r\ T_f/T_r$. L'application numérique donne $V'_r = 0{,}096\,\mathrm{L}$ et $W_{1\to2} = 8{,}44\,\mathrm{kJ}$.

v. De la même manière selon $3 \to 4$ on a $V_f = 0$, V_r ne change pas et V_c passe de V_m à V_M, donc

$$W_{3\to4} = -\int_{V_c=V_m}^{V_M}\frac{nR}{\dfrac{V_c}{T_c} + \dfrac{V_r}{T_r}}\mathrm{d}V_c = nRT_c\ln\left(\frac{V_m + V''_r}{V_M + V''_r}\right)$$

avec $V''_r = V_r\ T_c/T_r$. L'application numérique donne $V''_r = 0{,}360\,\mathrm{L}$ et $W_{3\to4} = -26{,}9\,\mathrm{kJ}$.

vi. Le travail total reçu lorsque $V_r \neq 0$ vaut donc $W = -18{,}5\,\mathrm{kJ}$ et est inférieur (en valeur absolue) au travail obteni sans régénérateur (on avait trouvé $W_{sr} = -24{,}8\,\mathrm{kJ}$).

vii. Dans ce système tous les transferts thermiques se font entre sources ayant localement la même température. Ils sont donc réversibles et se font sans création d'entropie. Le rendement est ainsi le rendement idéal du cycle de Carnot.

b.

i. C'est probablement un effet dynamique : l'échange thermique entre le gaz et le régénérateur n'a pas le temps de se faire complètement du fait du passage rapide du gaz dans celui-ci lors du transfert d'un compartiment à l'autre.

ii. Comme $V_r = 0$ le travail reçu est le même que précédemment mais la source chaude doit fournir un transfert thermique différent. Par définition de x, on a

$$Q'_c = xQ_{2\to3} + Q_{3\to4} = xn\frac{R}{\gamma - 1}(T_c - T_f) + nRT_c\ln\left(\frac{V_M}{V_m}\right).$$

On trouve alors l'expression de l'efficacité donnée par l'énoncé avec $C_2 = x\left((\gamma-1)\ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right)\right)^{-1}$.

iii. Application numérique : $C_2 = 0.361$ et $e = 0.580$ au lieu de 0.733 pour le rendement de Carnot.

iv. Lors de cette transformation le gaz reçoit du cuivre une chaleur $(1-x)Q_{2\to3}$ et le cuivre reçoit par définition le transfert opposé. On a alors $m_{\mathrm{Cu}}c\Delta T_{\mathrm{Cu}} = -(1-x)Q_{2\to3}$ où m_{Cu} est la masse de cuivre et ainsi $\Delta T_{\mathrm{Cu}} = -38{,}9\,\mathrm{K}$.

 (cc) BY-NC-SA jules.fillette@phys.ens.fr

c.

i. La loi de Fourier s'écrit $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$.

ii. T est linéaire et $T(x) = T_c + \dfrac{x}{L}(T_f - T_c)$ donc Φ, qui est le flux de $\vec{j}_{\text{th}}$ à travers une section de la barre, vaut

$$\Phi = A\frac{\lambda}{L}(T_c - T_f)\,.$$

iii. On a $V = AL = \pi R_{\text{Cu}}^2 \times 2R_{\text{Cu}}$ donc $R_{\text{Cu}} = 4{,}6\,\text{cm}$ et $\Phi = 22{,}4\,\text{kW}$.

iv. Dans cette superposition de disque le contact entre deux disque est nettement moins bon que si on avait construit un bloc de cuivre, simplement par diminution de la surface réelle de contact. Cela protège d'un trop grand flux thermique non désirable, irréversible, du compartiment chaud vers le compartiment froid. Au contraire, le flux thermique radial du cuivre vers le gaz est maintenu efficacement, ce que l'on souhaite.

 (cc) BY-NC-SA