

## TD n°V : Les phénomènes de transport

### Correction de l'exercice 21 : Quelques questions sur les phénomènes de transport

1. Pour l'étude des phénomènes de transport, on ne peut pas considérer des systèmes rigoureusement à l'équilibre thermodynamique, sinon on n'étudie pas l'aspect « transport ». C'est pour cela que l'on se place dans le cadre de l'**équilibre thermodynamique local** (ETL) : tout sous-système mésoscopique du système global peut être regardé, à chaque instant, comme ayant atteint l'équilibre thermodynamique.

Alors on peut définir localement les différentes grandeurs intensives caractéristiques du système qui varient continûment : on traitera ainsi des champs scalaires  $T(\vec{r}, t)$ ,  $u(\vec{r}, t)$ ,  $s(\vec{r}, t)$ , ... (avec  $u$  et  $s$  l'énergie interne massique et l'entropie massique respectivement).

Cela suppose des déséquilibres « faibles » : une transformation trop brutale ne pourra être étudiée dans ce cadre. Pour que l'ETL soit réalisé, il faut une condition en espace et une condition en temps :

- Les « particules » responsables de l'homogénéisation ont un libre parcours moyen  $m^*$  (distance moyenne parcourue entre deux collisions) qui doit être faible devant les dimensions mésoscopiques pour s'assurer que les collisions (responsables de l'homogénéisation) aient bien lieu au sein du sous-système. En pratique, pour les systèmes usuels,  $V \sim 1 \mu\text{m}^3$  est satisfaisant.
- Le temps entre deux collisions  $\tau_{\text{eq}}$  doit être faible devant le temps caractéristique  $\tau_{\text{ev}}$  d'évolution du système d'étude.

2.

a. La loi de Fourier est une loi phénoménologique, elle donne la densité de flux de chaleur en fonction de la température :

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T),$$

avec  $\lambda$  le coefficient de conductivité thermique, positif, qui varie entre des valeurs de l'ordre de quelques  $1.10^{-2} \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  pour les isolants thermiques usuels et peut aller jusqu'à plusieurs centaines avec environ  $400 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  pour le cuivre et environ  $5000 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  pour le graphène.

Des lois analogues existent pour la diffusion de particules (loi de Fick) et pour la diffusion de charges (loi d'Ohm locale).

b. On considère un milieu homogène quelconque indéformable de volume  $V$  et délimité par une surface  $S$ . On considère un élément de volume  $d\tau$  de ce milieu. Son énergie interne varie pendant l'intervalle de temps  $dt$  selon le premier principe de la thermodynamique,  $dU = \delta W + \delta Q$ . On suppose que le milieu est indéformable, de sorte que le travail des forces de pression est nul. Comme il n'y a a priori pas d'autres forces s'exerçant sur le système, le premier principe se réduit à  $dU = \delta Q$ .

La chaleur reçue par l'élément de volume  $d\tau$ , en l'absence de source de chaleur interne est alors exprimée en fonction du vecteur densité de courant de chaleur  $\vec{j}_Q$  par :

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS}$$

l'intégration portant sur la surface délimitant le volume considéré, et le vecteur  $\vec{dS}$  étant porté par la normale externe. On en déduit, en introduisant l'énergie interne volumique  $u$ , puis la capacité calorifique massique  $c_m$  et la masse volumique  $\rho$  du milieu

$$\frac{dU}{dt} = \frac{du}{dt} d\tau = c_m \rho \frac{dT}{dt} d\tau = \frac{\delta Q}{dt} = - \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} = -\text{div} \vec{j}_Q d\tau$$

où l'on a utilisé le théorème de Green-Ostrogradsky et le fait que  $d\tau$  est un volume élémentaire. La loi de Fourier permet de relier  $\vec{j}_Q$  au gradient de la température  $T(\vec{r}, t)$  et on a donc :

$$c_m \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} - \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) = \lambda \Delta T$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien.

*Remarque* : il faut aussi savoir faire cette démonstration dans le cas beaucoup plus simple à une dimension.

c. La diffusion est un phénomène qui tend à homogénéiser les différentes grandeurs intensives au sein d'un système, en ce sens elle est essentiellement irréversible. D'autre part l'équation de la chaleur n'est pas invariante par renversement du temps et de l'espace ( $t \rightarrow -t$  et  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}$ ) ce qui traduit également l'irréversibilité du phénomène.

**Bonus, calcul à méditer** : dans le cas de la diffusion thermique, on peut calculer un taux de création d'entropie volumique pour une transformation isobare. On considère

un volume  $V$  entouré d'une surface fermée  $\Sigma$  pendant  $dt$  :

$$dS = \iiint \rho d\tau \frac{\partial s}{\partial t} dt = \delta_e S + \delta_c S$$

$$\delta_e S = - \oiint \frac{\vec{J}_Q \cdot d\vec{\Sigma}}{T} dt = - \iiint \operatorname{div} \frac{\vec{J}_Q}{T} d\tau dt$$

$$\delta_c S = \iiint A d\tau dt$$

On a ici posé  $A$  le taux de création d'entropie volumique. On peut alors écrire :

$$A = \rho \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\vec{J}_Q}{T}$$

Or on a, à pression constante,  $ds = dh/T = c_p dT/T$ , ce qui permet d'écrire :

$$A = \frac{1}{T} \underbrace{\left( \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_Q \right)}_{=0} + \vec{J}_Q \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{T} \right)$$

$$A = -\lambda \operatorname{grad}(T) \cdot \left( -\frac{1}{T^2} \right) \operatorname{grad}(T)$$

$$A = \lambda \left( \frac{\operatorname{grad}(T)}{T} \right)^2$$

On a ainsi obtenu l'expression d'un taux de création d'entropie volumique, toujours positif, qui s'annule lorsque la conductivité tend vers ou quand la température est homogène dans le système (dans les deux cas, il n'y a plus de diffusion).

3. Pour un écoulement à température  $T_0$  autour d'une structure à température de surface uniforme  $T_S$  et de surface exposée  $S$ , l'expression du flux de chaleur en convection  $\Phi$  est donnée par la loi de Newton :

$$\Phi = hS(T_S - T_0)$$

Avec  $h$  le coefficient de transfert thermique convectif en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ , qui dépend de la géométrie, du fluide, du matériau, du type de convection (naturelle/forcée).

Fluide	$h$ ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ )
Air en convection naturelle	5 – 25
Air en convection forcée	100 – 900
Eau en convection naturelle	10 – 500
Eau en convection forcée	100 – 15000

De manière générale, la convection forcée conduit à des transferts thermiques plus importants que la conduction.

4.

a. Un corps noir est un corps qui absorbe tout le rayonnement électromagnétique qu'il reçoit, quelles que soient sa fréquence et sa direction. Il émet lui-même un rayonnement électromagnétique dont le spectre à l'équilibre thermique ne dépend que de sa température. Pour le modéliser, on peut considérer une enceinte rigide percée d'une toute petite ouverture. Ainsi, tout rayon pénétrant l'ouverture sera réfléchi sur les parois jusqu'à être absorbé par l'une d'entre elles, à condition que l'ouverture soit suffisamment petite devant la taille de l'enceinte. Attention, c'est l'ouverture de l'enceinte qui se comporte comme un corps noir. Pour qu'il y ait équilibre thermique, il faut maintenir l'enceinte à une température fixée, c'est pourquoi l'on parle généralement de four.

b. La loi du déplacement de Wien permet d'obtenir la longueur d'onde  $\lambda_{\max}$  correspondant au maximum en énergie du spectre radiatif d'émission d'un corps noir en fonction de sa température  $T$  :

$$\lambda_{\max} T \approx 2900 \mu\text{m} \cdot \text{K}.$$

La loi de Stefan permet d'obtenir la puissance émise par un corps noir de surface  $S$  en fonction de sa température  $T$  :

$$P = \sigma S T^4.$$

avec la constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

c. Le soleil rayonne de façon isotrope et toute la puissance est conservée. Si on nomme  $\Phi_S$  le flux surfacique émis au niveau du soleil, on a :

$$\Phi_S (4\pi R_S^2) = \Phi_{ST} (4\pi D^2).$$

Avec la loi de Stefan (on suppose que le soleil rayonne comme un corps noir), on en déduit :

$$T_S = \left( \frac{\Phi_S}{\sigma} \right)^{1/4} = \left( \frac{\Phi_{ST} D^2}{\sigma R_S^2} \right)^{1/4} \approx 5,78 \cdot 10^3 \text{K}.$$

On a alors, avec la loi de Wien,  $\lambda_{\max} \approx 500 \text{nm}$ , pile au milieu du spectre visible.

d. Comme on suppose un rayonnement incident parallèle, la puissance totale absorbée par le sol terrestre est donnée par :

$$P_{abs} = \pi R^2 T^2 (1 - \alpha) \Phi_{ST}$$

Comme on suppose la Terre en équilibre radiatif, la puissance émise (donnée par la loi de Stefan, le rayonnement terrestre étant considéré comme un rayonnement de corps noir) est égale à la puissance reçue, on en déduit alors :

$$4\pi R_T^2 \sigma T_T^4 = \pi R_T^2 (1 - \alpha) \Phi_{ST}$$

$$T_T = \left( \frac{(1 - \alpha) \Phi_{ST}}{4\sigma} \right)^{1/4} \approx 255 \text{ K.}$$

On voit que la température moyenne obtenue dans ce modèle rudimentaire est très basse, il faut bien sûr prendre en compte l'atmosphère et en particulier l'effet de serre pour pouvoir évaluer la température terrestre.

5. On considère un système de deux surfaces isothermes de températures  $T_1$  et  $T_2$  avec un flux d'énergie thermique noté  $\Phi$  de la surface 1 vers la surface 2. On considère qu'on a atteint un état stationnaire (important, sinon la résistance thermique n'est plus forcément définie).

De manière générale, on exprime la résistance électrique via la loi d'Ohm globale *i.e.*  $R_{\text{elec}} = U/I$ . Ici, le rôle de la tension est joué par la différence de température et celui de l'intensité par le flux d'énergie thermique  $\Phi$ . On peut donc écrire :

$$R_{\text{cond}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

Pour des surfaces planes identiques et parallèles, l'expression se simplifie grâce à la loi de Fourier en :

$$R_{\text{cond}} = \frac{e}{\lambda S}$$

Avec  $e$  la distance entre les surfaces,  $S$  la surface et  $\lambda$  la conductivité thermique du milieu entre les surfaces. Cette expression sert à simplifier de nombreux problèmes de conduction à l'état stationnaire, comme celui du mur d'une maison ou du double-vitrage.

Pour la convection et le rayonnement, la même définition de base est applicable. On peut aussi en général simplifier les expressions dans le cas précédent à condition de vérifier si cela a bien un sens physique.

## Correction de l'exercice 22 : Isolation d'une canalisation d'eau

1. La discontinuité de température est APPARENTE et due à l'existence d'une couche limite de fluide au contact de la paroi. Elle est décrite par la loi de Newton  $\vec{j} = h(T_f - T_s)\vec{n}$  où  $T_f$  et  $T_s$  sont les températures respectivement du fluide et du solide et extérieure et  $\vec{n}$  est le vecteur unité de surface orienté comme toujours vers l'extérieur (du solide vers le fluide dans le cas présent). Le coefficient de conducto-convection,  $h$ , est exprimé en  $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  et vaut typiquement  $1 \cdot 10^2$ . La température est continue en  $R = R_2$  puisque l'interface, immatérielle, ne peut stocker d'énergie.

2. En géométrie cylindrique, lorsqu'on augmente l'épaisseur d'isolant on diminue le flux de conduction mais on favorise dans le même temps la conducto-convection. Cette compétition est caractérisés par  $\lambda'$  (qui quantifie la conduction dans l'isolant) et  $h$  (qui quantifie la conducto-convection en surface) de sorte que par analyse dimensionnelle on peut extraire une dimension importante du problème

$$e = \frac{\lambda'}{h}.$$

On peut tout de même intuitive que, la conduction ayant lieu en volume et la conducto-convection en surface, il sera avantageux de mettre beaucoup d'isolant. En revanche, lorsque l'épaisseur d'isolant est trop faible, l'effet de surface peut dominer.

3. Il s'agit, à températures de l'eau et de l'air fixées, de minimiser les pertes, c'est-à-dire le flux thermique parcourant la gaine. Celui-ci étant relié à la différence de température par la résistance thermique

$$\Delta T = R_{\text{th}} \Phi_{\text{th}}$$

nous allons chercher à **maximiser la résistance thermique**. Il faut alors exprimer les résistances de chaque morceau puis les sommer (association en série puisque tous les matériaux sont traversés par le même flux) et enfin maximiser la résistance totale en fonction de  $R_3$ .

Avant toute chose, commençons par redémontrer l'expression de la résistance thermique d'un cylindre de hauteur  $H$  et compris entre les rayon  $R_1$  et  $R_2$ . Commençons par exprimer le flux thermique (en régime stationnaire et en l'absence de source in-

terne d'énergie celui-ci est conservé : il ne doit pas dépendre de  $r$ ) :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{th}} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS} = \iint (-\lambda \vec{\text{grad}}(T)) r d\theta dz \vec{e}_r \\ &= - \iint \lambda \frac{\partial T}{\partial r} r d\theta dz \\ \Phi_{\text{th}} &= -2\pi \lambda r H \frac{\partial T}{\partial r}.\end{aligned}$$

Comme  $\partial T / \partial r < 0$  le flux est bien orienté selon  $\vec{e}_r$  et représente bien des fuites thermiques (réciproquement on peut imaginer une canalisation d'eau froide à protéger de l'air chaud)

On peut alors exprimer la différence de température entre l'extérieur et l'intérieur :

$$\begin{aligned}T_a - T_e = \Delta T &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{\text{grad}}(T) \cdot \vec{dl} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial T}{\partial r} < 0 \\ &= \int_{R_1}^{R_2} -\frac{\Phi_{\text{th}}}{2\pi \lambda r H} \\ &= -\frac{\Phi_{\text{th}}}{2\pi \lambda H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que la résistance thermique est définie à partir de la différence de température  $T_c - T_f > 0$  d'où

$$R_{\text{th}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi \lambda H}$$

La loi de Newton de la conducto-convection  $\Phi = (T_2 - T_1)hS$  permet immédiatement de définir une résistance thermique de conducto-convection  $R_{\text{CC}}$  :

$$R_{\text{CC}} = \frac{1}{2\pi r H h}$$

Enfin la résistance totale est obtenue par somme de la résistance de conducto-convection eau/métal, de la résistance de conduction dans le métal, puis de celle dans l'isolant, et enfin celle de conducto-convection à l'interface isolant/air d'où

$$2\pi \times H \times h \times R_{\text{th, avec isolant}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\lambda/h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\lambda'/h} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \frac{1}{R_3}.$$

Cette résistance est à comparer à la résistance de la canalisation sans isolant :

$$2\pi \times H \times h \times R_{\text{th, sans isolant}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\lambda/h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{R_2}.$$

Reste à comprendre comment la différence  $R_{\text{th, avec isolant}} - R_{\text{th, sans isolant}}$  varie avec  $R_3$ . On calcule déjà, en notant  $e = \lambda'/h$  et  $R_3 = R_2(1+x)$  (c'est-à-dire que  $x$  est l'épaisseur d'isolant en unité de  $R_2$ ) :

$$\Delta R = R_{\text{th, avec isolant}} - R_{\text{th, sans isolant}} = \frac{1}{e} \ln(1+x) + \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{1+x} - 1 \right),$$

de sorte que la résolution du problème dépend en fait du rapport de  $e$  à  $R_2$ .  $\Delta R$  atteint un extrema en

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial x} = \frac{1}{e} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{R_2} \left( \frac{-1}{(1+x)^2} \right) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{e}{R_2} - 1.$$

Il y a alors deux options :

- Soit  $x_0$  est négatif, l'extremum n'existe pas ( $x$  est l'épaisseur et nécessairement positif). On montre alors que  $\partial \Delta R / \partial x > 0$  et  $\Delta R(x=0) = 0$ .  $\Delta R$  est donc positive dès que  $x$  est non nul, il est avantageux de mettre de l'isolant.
- Soit  $x_0$  est positif auquel cas l'extremum existe. Le calcul de la dérivée seconde évaluée en  $x_0$  montre que cet extremum est un minimum.  $\Delta R$  part toujours de 0, descend jusqu'à une valeur négative minimale atteinte en  $x_0$  puis remonte et devient positive seulement pour  $x \geq x_1 > x_0$ . Il n'est ainsi pas avantageux de placer de l'isolant sur une couche moins épaisse que  $x_1$ .

En conclusion l'isolation d'une canalisation est loin d'être un problème trivial. L'intérêt de mettre ou non de l'isolant dépend à la fois du rayon extérieur de la canalisation, et des propriétés thermiques du matériaux utilisé via le rapport  $e = \lambda'/h$ .

### Correction de l'exercice 23 : Ondes thermiques (effet de cave)

1. L'équation de diffusion de la chaleur dans le sol selon  $z$  est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

L'équation aux dimensions issue de l'équation de la chaleur s'écrit

$$[T][t]^{-1} = [D][T][L]^{-2} \Rightarrow [L] = [D]^{1/2}[t]^{1/2}$$

Par conséquent, si on se donne une échelle de temps  $t_0$ , il apparaît naturellement une échelle de longueur  $z_0$  définie par  $z_0 = \sqrt{Dt_0}$ . Dans ce problème, l'échelle sera donc

$$z_0 \propto \sqrt{D/\omega}$$

2. Le problème posé est celui de la propagation à l'intérieur du sol d'une onde thermique imposée par l'extérieur, en  $z = 0$ , par exemple par l'effet des fluctuations journalières d'éclairement. La forme la plus naturelle pour ces fluctuations est une sinusoïde de pulsation  $\omega$ , autour de la valeur moyenne  $T_0$ . Naturellement, on recherche alors la distribution de température sous la forme complexe suivante :

$$T^*(z, t) = T_0 + F(z) \exp(i\omega t)$$

où  $F(z)$  est une fonction éventuellement complexe de la profondeur  $z$ .

L'équation de la chaleur s'écrit alors  $i\omega F(z) \exp(i\omega t) = DF''(z) \exp(i\omega t)$  et la fonction  $F$  doit vérifier :

$$F'' - \frac{i\omega}{D} F = 0 \Rightarrow F(z) = A \exp\left((1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) + B \exp\left(-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right),$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

La température devant rester finie pour  $z \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $A = 0$ , et par conséquent, en notant  $\Delta T$  l'amplitude des fluctuations à la surface :

$$T^*(z, t) = T_0 + \Delta T \exp\left(-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) \exp(i\omega t).$$

En repassant en notation réelle, on obtient la forme de la distribution de température

$$T(z, t) = T_0 + \Delta T \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{z_0}\right) \quad \text{avec} \quad z_0 = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}.$$

3. On voit que l'onde thermique se propage vers l'intérieur du sol ( $z > 0$ ) avec une amplitude décroissant exponentiellement. L'échelle caractéristique de l'atténuation est  $z_0$ , soit, au facteur numérique près, l'échelle trouvée à la première question puisque l'échelle de temps naturelle est précisément l'inverse de la pulsation. Le nombre d'onde de la propagation est égal à  $k = 1/z_0$  et la longueur d'onde est donc  $\lambda = 2\pi z_0$ . La propagation se fait à la vitesse de phase  $v_\varphi = \omega/k = \omega z_0 = \sqrt{2D\omega}$ .

On peut comparer ce phénomène à l'effet de peau en électromagnétisme. Il y a là aussi une pénétration limitée de l'onde de courant à l'intérieur du matériau. Cependant, dans le cas de l'effet de peau, la profondeur de pénétration diminue lorsque la conductivité électrique augmente, alors qu'elle augmente avec la conductivité thermique.

4. La profondeur de pénétration est donnée, en fonction de la période du forçage et des coefficients donnés relatifs au sol, par la relation suivante :

$$z_0 = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{DT}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda T}{\pi \rho C}}$$

Pour les fluctuations journalières,  $T = 86400$  s, d'où  $z_0 \approx 6,8$  cm, et pour les fluctuations annuelles ( $T \approx 3,15 \cdot 10^7$  s) on a  $z_0 \approx 1,3$  m. Ces chiffres justifient d'une part qu'on conserve des produits à la cave pour leur éviter les variations rapides de température qui pourraient les dégrader, et d'autre part qu'on enterre les canalisations pour éviter qu'elles éclatent en hiver.

**Remarque :** Si on considère une condition aux limites en flux plutôt qu'une condition aux limites en température, la solution aura la même forme à ceci près que le retard en phase dans le cosinus sera augmenté de  $\pi/4$  (bon exercice). Ce cas est plus compliqué (plus lourd pour une leçon) mais on peut se dire qu'à la surface de la Terre, c'est bien le flux solaire qui varie périodiquement et la température qui suit ces variations, d'où ce retard supplémentaire.

## Correction de l'exercice 24 : Température de contact (cf compo 2002)

1.

a. On applique l'équation de la chaleur au barreau, en tenant en compte du fait qu'on considère une propagation à une dimension. On note la capacité calorifique massique  $c_m$ , la masse volumique  $\rho$  du barreau, et la conductivité thermique  $\lambda$ .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec le coefficient de diffusion} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c_m}$$

b. On a cinq paramètres qui sont  $T(x, t)$ ,  $T_0$ ,  $D$ ,  $x$ ,  $t$  pouvant être exprimées par trois unités indépendantes, par exemple Kelvin, mètre et seconde. On remarque alors que le seul nombre sans dimension mettant en jeu les variables  $x$  et  $t$  que l'on peut écrire est de la forme  $u = \alpha(x/\sqrt{Dt})^n$ . Même si tout choix de  $\alpha$  et  $n$  est a priori possible, les calculs seront plus simples pour  $\alpha = 1/2$  et  $n = 1$  (ce qui permettra d'avoir  $x$  au dénominateur et donc de simplifier le calcul de la dérivée seconde). En écrivant  $\frac{T(x, t)}{T_0} = f\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$  on obtient l'équation

$$f'' + \frac{x}{\sqrt{Dt}} f' = 0 = f'' + 2u f' \quad (8)$$

**Remarque :** On constate que l'on aurait pu s'inspirer des résultats de l'exercice 1 pour proposer ce changement de variable. On peut aussi invoquer le théorème Pi si on est familier avec celui-ci. Il faut aussi noter que ce changement de variable n'est pertinent que si les conditions initiales et/ou aux limites peuvent s'exprimer en fonction de la variable  $u$ , sinon la méthode est stérile. Il existe d'autres méthodes de résolution pour des cas particuliers (e.g. exercice sur les ondes thermiques).

Intégrons ensuite cette l'équation :

$$\ln(f') = -u^2 + \text{cte} \quad \text{puis} \quad f = A \int_0^v u e^{-v^2} dv + B$$

Les conditions aux limites sur la température permettent de déterminer  $A$  et  $B$ . Au contact avec le thermostat,  $T(x = 0, t) = T_0$ , donc  $B = 1$ . L'autre condition aux limites  $T(x = +\infty, t) = T_i$  donne :

$$\frac{T_i}{T_0} = A \frac{\sqrt{\pi}}{2} + B \Rightarrow A = \frac{T_i - T_0}{T_0} \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

On obtient finalement l'expression de la température dans le barreau, en introduisant ce qu'on appelle la fonction erreur notée  $erf(x)$  :

$$\frac{T(x, t)}{T_0} = 1 + \frac{T_i - T_0}{T_0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-v^2} dv = 1 + \frac{T_i - T_0}{T_0} erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

c. D'après la loi de Fourier à une dimension :  $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ . On obtient ainsi :

$$j(x, t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{\pi Dt}} (T_i - T_0) \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

De plus, comme les dérivées partielles par rapport à  $t$  et  $x$  commutent, le courant de chaleur vérifie la même équation de diffusion que la température :

$$\frac{\partial j}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j}{\partial x^2}$$

On obtient alors les allures suivantes pour les distributions de température et de densité de courant :

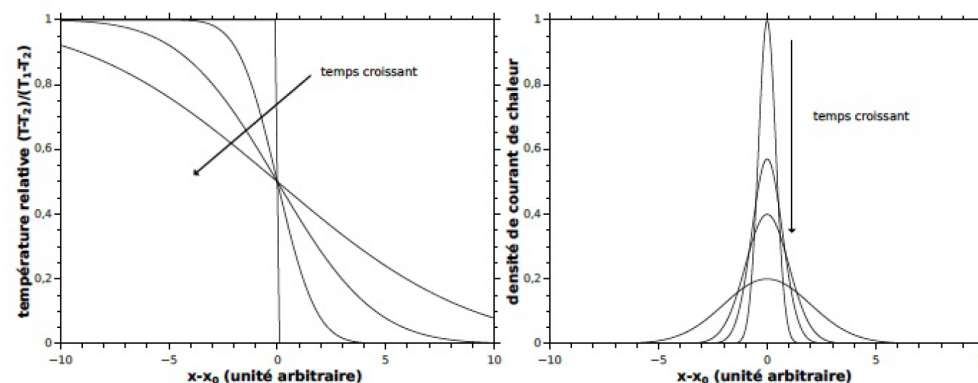


FIGURE 18 – Allure des distributions de température relative (gauche) et de densité de courant normalisée (droite) dans les barreaux.

**Remarque :** Il est important de bien noter que même si la température et la densité de courant vérifient la même équation différentielle, des conditions aux limites différentes donnent des solutions très différentes. Ici une solution initiale en marche d'escalier donne

une solution en fonction erreur (qui est une marche lissée) qui s'adoucit avec le temps (cas ici de la température). Alors qu'une condition initiale en fonction de Dirac donne comme solution une gaussienne qui s'aplatit au cours du temps (ici le cas de la densité de courant). Ces deux comportements peuvent être aussi être observés dans d'autres types de diffusion (particules,...).

2.

a. La relation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Si on suppose qu'à chaque instant, le courant de chaleur est maximal à l'interface, le terme en divergence s'annule en  $x = 0$ . Donc la température de contact est constante. On notera  $T(x = 0, t) = T_0$ . (On peut le vérifier sur les graphes précédents).

b. Comme la température de contact est constante et vaut  $T_0$ , on peut directement appliquer les résultats du premier paragraphe en faisant attention au signe de l'argument de la fonction erreur. On obtient respectivement dans les domaines  $x > 0$  et  $x < 0$  :

$$T_2(x) = T_0 + (T_2 - T_0) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_2 t}}\right) \quad \text{et} \quad T_1(x) = T_0 + (T_1 - T_0) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_1 t}}\right)$$

c. Il suffit d'appliquer le résultat de la question 1(c). On obtient les flux de chaleur respectifs reçus par les deux milieux :

$$j_{-2}(x, t) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\pi D_2 t}} (T_0 - T_2) \quad \text{et} \quad j_{-1}(x, t) = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{\pi D_1 t}} (T_0 - T_1)$$

Comme ces deux expressions de la densité de courant de chaleur sont nécessairement égales à l'interface  $j_{-2}(x = 0, t) = j_{-1}(x = 0, t)$ , on en déduit la température de contact :

$$T(x = 0, t) = T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2} \quad \text{avec} \quad E_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{D_i}} = \sqrt{\lambda_i \rho_i C_i}$$

La température de contact est donc un barycentre des températures des deux barreaux pondérée par un coefficient  $E_i$  appelé effusivité.

d. Application numérique On obtient :

eau	$E = 1,6 \cdot 10^3$ USI	$T_0 = 28,5^\circ\text{C}$
bois	$E = 2,4 \cdot 10^2$ USI	$T_0 = 35^\circ\text{C}$
aluminium	$E = 2,6 \cdot 10^4$ USI	$T_0 = 21^\circ\text{C}$

## Correction de l'exercice 25 : Marche aléatoire à une dimension (cf compos 2002)

1.

a. C'est une loi binomiale : il faut choisir les pas qui sont faits vers la droite et multiplier par les probabilité de chaque pas :

$$\mathbb{P}(n_d, N) = \binom{N}{n_d} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_d} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-n_d} = \binom{N}{n_d} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

b. On a immédiatement  $x = n_d a - (N - n_d) a = (2n_d - N) a$ . La valeur moyenne de  $x$  ou celle de  $x^2$  sont donc liée aux moyennes de  $n_d$  et  $n_d^2$ . On devra pour cela se servir d'un résultat bien connu sur le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (1+1)^N &= 2^N \\ &= \sum_{n_d=0}^N \binom{N}{n_d} 1^{n_d} 1^{N-n_d} = \sum_{n_d=0}^N \binom{N}{n_d} \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \langle n_d \rangle &= \sum_{n_d=0}^N n_d \mathbb{P}(n_d, N) = \sum_{n_d=0}^N n_d \binom{N}{n_d} \left(\frac{1}{2}\right)^N \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^N \sum_{n_d=0}^N n_d \frac{N!}{(n_d!) (N-n_d)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^N N \sum_{n_d=1}^N \frac{N-1!}{(n_d-1)! (N-n_d)!} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^N N \sum_{n_d=1}^{N-1} \frac{N-1!}{(n_d-1)! (N-1-n_d)!} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^N N 2^{N-1} = \frac{N}{2} \end{aligned}$$

Ce qui était relativement attendu... Pour la moyenne du carré on se sert de l'identité  $n_d^2 = n_d(n_d - 1) + n_d$  et le même de genre de calcul que précédemment montre que

$$\langle n_d(n_d - 1) \rangle = \frac{N(N-1)}{4}$$

D'où

$$\langle n_d^2 \rangle = \frac{N(N-1)}{4} + \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{4}$$

On en déduit

$$\langle x \rangle = (2 \langle n_d \rangle - N)a = 0 \quad \text{et} \quad \langle x^2 \rangle = \langle (4n_d^2 - 4n_d N + N^2) \rangle a^2 = Na^2$$

En moyenne la distance parcourue est nulle ce qui est cohérent avec le fait que la trajectoire est symétrique et équiprobable. En revanche la variance est non nulle et croît avec le nombre d'étape. Si chaque étape dure un temps  $\tau$  on a  $N = t/\tau$  et

$$\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{\tau} t = 2Dt$$

on reconnaît l'élargissement typique d'un phénomène de diffusion avec une dépendance de la distance en  $\sqrt{t}$ . On en tire l'expression du coefficient de diffusion

$$D = \frac{a^2}{2T}$$

2.

a. Si la position  $x = na$  peut être atteinte en  $N$  étapes, soit  $n_d$  le nombre de pas vers la droite permettant d'accéder à cette position alors avec la question précédente,  $n_d = (n + N)/2$ . On note que  $n$  et  $N$  doivent avoir la même parité pour que ce raisonnement soit valable. Enfin :

$$\mathbb{P}'(n, N) = \mathbb{P}\left(\frac{n+N}{2}, N\right) = \binom{N}{\frac{n+N}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{N!}{\frac{n+N}{2}! \frac{N-n}{2}!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

b. On applique la formule de Stirling à la limite  $n \ll N$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}' &\approx \left(\frac{1}{2}\right)^N \times \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\left(\frac{(N+n)/2}{e}\right)^{(N+n)/2} \left(\frac{(N-n)/2}{e}\right)^{(N-n)/2}} \times \sqrt{\frac{2\pi N}{\pi^2(n+N)(N-n)}} \\ &\approx \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{N}\right)^{(N+n)/2} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{(N-n)/2}} \times \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \sqrt{\frac{1}{(1 - n^2/N^2)}} \end{aligned}$$

On développe chaque terme à l'ordre 2 et on réinjecte :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{n}{N}\right)^{(N+n)/2} &= \exp\left(\frac{N+n}{2} \ln\left(1 + \frac{n}{N}\right)\right) \approx \exp\left(\frac{N+n}{2} \left(\frac{n}{N} - \frac{n^2}{2N^2}\right)\right) \\ &\approx \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2N^2} - \frac{n^2}{4N}\right) \approx \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{4N}\right) \\ \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{(N-n)/2} &\approx \exp\left(\frac{-n}{2} + \frac{n^2}{4N}\right) \end{aligned}$$

Après simplification et en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas non nul il vient :

$$\mathbb{P}'(n, N) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \times \exp\left(-\frac{n^2}{2N}\right)$$

On obtient donc le résultat attendu : dans la limite  $n \ll N$  la probabilité d'être en une position  $x = na$  suit une loi gaussienne de largeur  $\Delta x = \sqrt{Na^2}$  identique à celle obtenue précédemment.

c. On peut aisément transformer cette probabilité de  $n$  et  $N$  en  $x$  et  $t$  en notant  $x = na$  et  $t = N\tau$  et en utilisant la conservation de la probabilité

$$\mathbb{P}(x, t) dx = \mathbb{P}'(n, N) \frac{\delta n}{2}$$

le facteur 1/2 venant du fait que  $n$  doit être de même parité que  $N$ . Alors ;

$$\mathbb{P}(x, t) = \frac{1}{2a} \mathbb{P}'(n, N) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi t a^2/\tau}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2/\tau t}\right) = \sqrt{\frac{1}{4\pi D t}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

3.

a. Pour être en  $n$  à l'instant  $N$  il n'y a pour l'instant  $N-1$  que deux possibilités : être en  $n-1$  ou en  $n+1$  et alors :

$$\mathbb{P}'(n, N) = \frac{1}{2} \mathbb{P}'(n-1, N-1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}'(n+1, N-1)$$

b. On suppose de nouveau que  $n \ll N$  de sorte que  $a \ll x$  et  $\tau \ll t$ . On fait alors le passage au continu en notant  $\tilde{\mathbb{P}}$  la nouvelle loi de probabilité :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(x, t + \tau) &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbb{P}}(x-a, t) + \frac{1}{2} \tilde{\mathbb{P}}(x+a, t) \\ &\approx \tilde{\mathbb{P}}(x, t) + \frac{a}{2} \times 0 + 2 \times \frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbb{P}}}{\partial x^2}(x, t) \end{aligned}$$

$$\approx \tilde{\mathbb{P}}(x, t) + \tau \frac{\partial \tilde{\mathbb{P}}}{\partial t}(x, t)$$

D'où l'équation différentielle

$$\frac{\partial \tilde{\mathbb{P}}}{\partial t}(x, t) = \frac{a^2}{2\tau} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbb{P}}}{\partial x^2}(x, t)$$



On trouve ainsi une équation de diffusion avec de nouveau le coefficient de diffusion  $D = \frac{a^2}{2\tau}$  cohérent avec les résultats précédents. On d'ailleurs déjà obtenu à la question 2.3 la solution de cette équation lorsque la condition initiale est un dirac : une gaussienne !

4.

a. En moyenne, une particule en rencontre une autre au bout d'une distance  $l$  de sorte qu'il n'y a qu'une seule molécule dans un cylindre de volume  $l\sigma_0$  d'où

$$nl\sigma_0 = 1$$

b. En remplaçant  $a$  par  $l^*$  et  $\tau$  par  $l^*/u^*$  on obtient

$$D = \frac{l^* u^*}{2}$$

Dans le cas du gaz parfait on a alors, en fonction des paramètres  $T$  et  $p$  :

$$l^* \approx \frac{1}{n\sigma_0} = \frac{k_B T}{p\sigma_0} \quad \text{et} \quad u^* \approx \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad \text{donc} \quad D \approx \sqrt{\frac{3}{4m}} \frac{(k_B T)^{3/2}}{p\sigma_0}$$

Pour l'air dans les conditions usuelles il vient  $D \approx 0,4 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  si on prend  $d = 0,3 \text{ nm}$  comme diamètre moléculaire et  $\sigma_0 = \pi d^2$ . Ainsi, dans un gaz, le temps nécessaire pour que  $\Delta x \approx 1 \text{ cm}$  est de l'ordre de quelques secondes. Dans un liquide en revanche il faudra près de  $10^4$  fois plus de temps soit quelques 7 heures.

c. On a trouvé  $D$  variant en  $T^{3/2} p^{-1}$ .

d. Si la dépendance en pression est la bonne la dépendance en température semble être sous évaluée dans notre modèle. En fait l'hypothèse erronée dans celui-ci est que  $\sigma_0$  ne dépend pas de la température ce qui n'est pas le cas expérimentalement :  $\sigma_0$  diminue lorsque  $T$  augmente.

e. Dans un milieu poreux il faudrait prendre en compte l'interaction des molécules de gaz avec le milieu et notre modèle tombe en défaut.